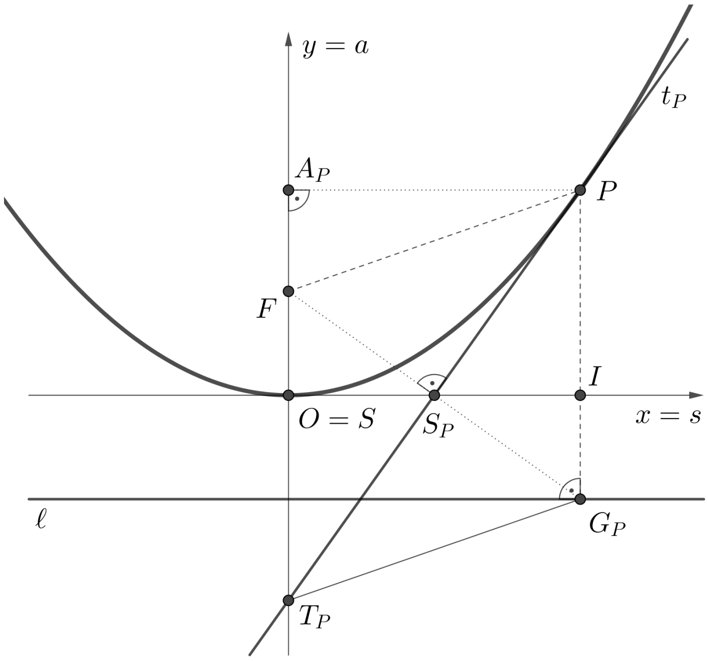
GRUNDLAGENBLATT – EIGENSCHAFTEN VON PARABELTANGENTEN

Fragen & Antworten auf diesem Grundlagenblatt

- ✓ Wie lauten die Koordinaten der dargestellten Punkte S_P, T_P, A_P?
- ✓ Wie konstruiert man die Tangente in P bei Angabe von a und S und Rekonstruktion von F und ℓ?
- ✓ Wie konstruiert man zueinander normale Parabeltangenten?
- ✓ Wie konstruiert man die Berührpunkte der normal aufeinander stehenden Tangenten t und t^* mit der Parabel?
- ✓ Wie wird die Fadenkonstruktion durchgeführt?



In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit einigen außergewöhnlichen und interessanten Eigenschaften von Parabeltangenten. Manche dieser Eigenschaften können wir durch rein synthetische Überlegungen aus der Brennpunktesdefinition der Parabel ableiten, während wir für andere einen einfachen Zugang mit Hilfe der Parabelgleichung finden werden.

In der Figur oben sehen wir die Parabel mit der Gleichung $x^2 = 2px$ im Koordinatensystem eingebettet. Wie auf dem GB – Parabelgleichung bereits besprochen, kennen wir die Koordinaten der Punkte $P(x/y)$, $S(0/0)$, $F(\frac{p}{2}/0)$ und $G_P(x/\frac{p}{2})$, sowie die Gleichung $\ell : y = -\frac{p}{2}$ der Leitlinie. Die Achse a liegt in der y-Achse und die Scheiteltangente s in der x-Achse. Weiters sind auch einige weitere Punkte

Datum: 17. November 2022.

hier eingezeichnet, nämlich der Schnittpunkt S_P der Parabeltangente t_P in P mit s, der Schnittpunkt T_P von t_P mit a und der Lotfußpunkt A_P von P auf a, sowie der Lotfußpunkt $I(x/0)$ von P auf s als Hilfspunkt.

Die Koordinaten dieser drei Punkte ergeben sich sofort aus den definierenden Eigenschaften der Parabel, die wir auf dem GB – Parabeldefinition, dem GB – Parabeltangenten und dem KB – Parabeltangenten mit Gegenpunkten besprochen haben. Wie auf dem KB – Parabeltangenten mit Gegenpunkten bereits zu sehen war, ist S_P der Mittelpunkt der Strecke FG_P, und hat somit die Koordinaten $S_P(\frac{x}{2}/0)$.

MmF

Wegen $S_PI = S_PO = \frac{x}{2}$ und $\angle IS_PP = \angle OS_PT_P$ sind die rechtwinkeligen Dreiecke IS_PP und OS_PT_P kongruent, und wir erhalten somit $T_P(0/-y)$ als Koordinaten von T_P. Schließlich gilt auch offensichtlich $A_P(0/y)$.

MmF

Es ist bemerkenswert festzuhalten, dass das Viereck PFT_PG_P für jeden Punkt P der Parabel ein **Rhombus** ist.

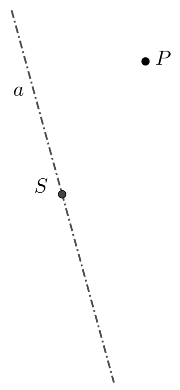
Die Strecken PF und PG_P sind nach der Parabeldefinition gleich lang, und wegen $a \perp \ell$ und $PG_P \perp \ell$ sind die Seiten PG_P und FT_P parallel. Außerdem gilt $PG_P = FT_P = y + \frac{p}{2}$, und das Viereck ist somit sicher ein Rhombus. Zusätzlich wissen wir auch schon, dass die Diagonalen FG_P und $PT_P = t_P$ zueinander normal stehen. Der Mittelpunkt S_P dieses Rhombus liegt auf der Scheiteltangente s.

Tangente in P bei Angabe von a und S und Rekonstruktion von F und ℓ

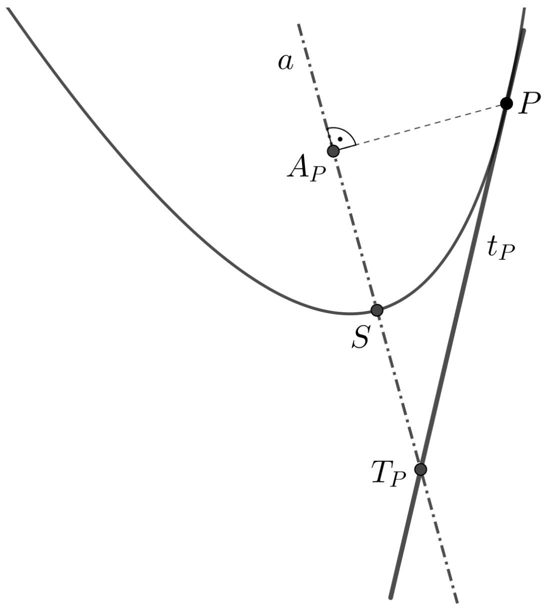
Eine erste, recht einfache, Tangentenkonstruktion ergibt sich unmittelbar aus diesen Punktkoordinaten. Wegen $ST_P = SA_P$ erhalten wir die Konstruktion, die in der folgenden Figur dargestellt ist.

Konstruktion 1 (Tangentenkonstruktion)**.**

Gegeben seien die Achse a und der Scheitel S einer Parabel, sowie ein Punkt P der Parabel. Konstruiere die Tangente t_P der Parabel in P. Bestimme ferner den Brennpunkt F und die Leitlinie ℓ der Parabel.

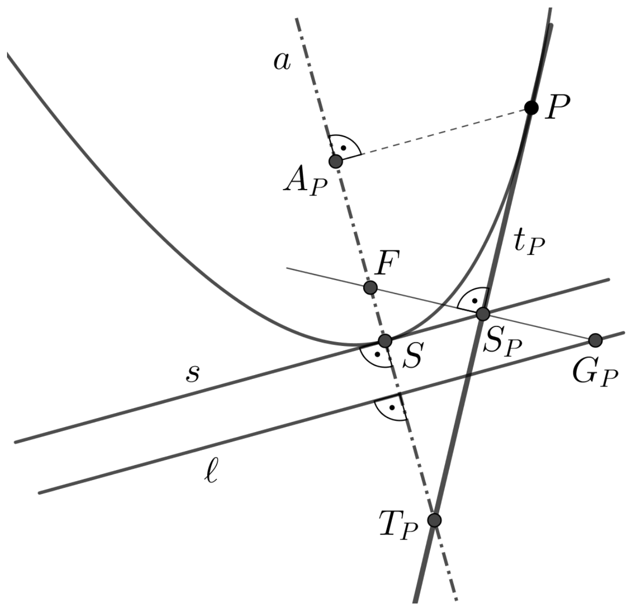


Lösung.



1) Wir wollen nun die Tangente der Parabel in P konstruieren. Zuerst bestimmen wir den Lotfußpunkt A_P von P auf a. Spiegeln wir diesen Punkt A_P an S, erhalten wir den Schnittpunkt T_P der Parabeltangente t_P in P mit a, und somit t_P als Verbindungsgerade von P mit T_P.

2) Nun können wir auch den Brennpunkt F und die Leitlinie ℓ der Parabel konstruieren.



3) Die Scheiteltangente s der Parabel ist zu a normal und geht durch S. Diese schneidet t_P im Punkt S_P.

4) Nun wissen wir aber, dass S_P der Mittelpunkt von FG_P ist, und dass FG_P normal zu t_P steht. Wir erhalten also F als Schnittpunkt von a mit der Normalen zu t_P durch S_P, und G_P als symmetrischen Punkt zu F bezüglich S_P.

5) Die Leitlinie ℓ erhalten wir dann als Normale zu a durch G_P.

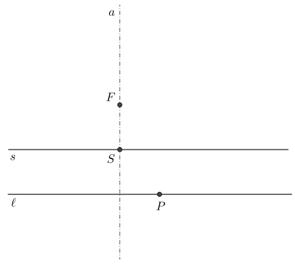
□

Zueinander normale Parabeltangenten

Auf dem KB – Parabeltangenten mit Gegenpunkten haben wir in Aufgabe 1 gesehen, wie man die Tangenten einer Parabel durch einen vorgegebenen Punkt X mit Hilfe der Gegenpunkte konstruieren kann. Nun stellt sich heraus, dass wir einen bemerkenswerten Sonderfall erhalten, wenn wir den Punkt X in dieser Konstruktion auf der Leitlinie ℓ annehmen.

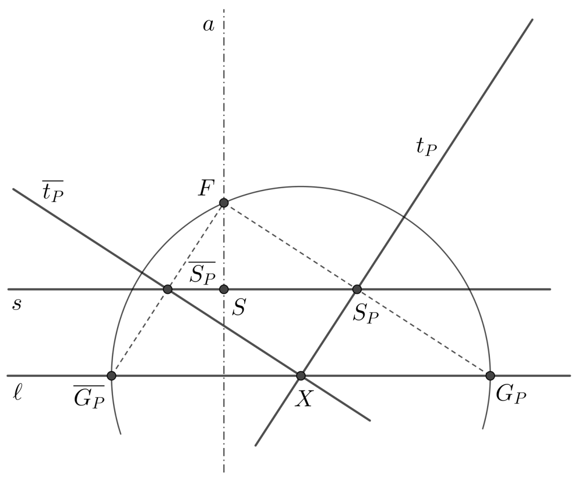
Konstruktion 2 (zueinander normale Tangenten)**.**

In dieser Figur sehen wir den Brennpunkt F, die Leitlinie ℓ, die Achse a, sowie Scheitel und Scheiteltangente einer Parabel gegeben, sowie einen Punkt X auf der Leitlinie ℓ. Konstruiere die Tangenten der Parabel durch einen vorgegebenen Punkt X auf der Leitlinie ℓ.



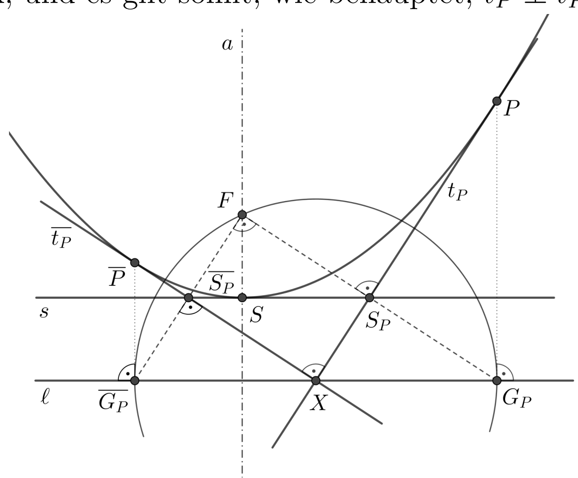
Lösung.

1) Wie auf dem KB – Parabeltangenten mit Gegenpunkten beschrieben, erhalten wir die Gegenpunkte der Parabeltangenten durch X als Schnittpunkte von ℓ mit dem Kreis mit Mittelpunkt X durch F. Dieser Kreis ist in der folgenden Figur dargestellt. Hier sehen wir also die beiden möglichen Gegenpunkte G_P und $\overline{G_P}$. Die Tangente t_P ist die Streckensymmetrale von FG_P und schneidet s im Mittelpunkt S_P von FG_P, und Analoges gilt für $\overline{G_P}$ und $\overline{t_P}$.



Nun haben wir speziell angenommen, dass X auf ℓ liegt. Der Kreis, den wir eben bei der Konstruktion mit Mittelpunkt in X durch F gezeichnet haben, hat $G_P\overline{G_P}$ als Durchmesser, und nach dem Satz von Thales steht FG_P daher normal zu $F\overline{G_P}$. Da $XS_P = t_P$ normal zu FG_P steht, und ebenso $X\overline{S_P}$ zu $F\overline{G_P}$, ist $XS_PF\overline{S_P}$ ein Rechteck, und es gilt somit, wie behauptet, $t_P \perp \overline{t_P}$.

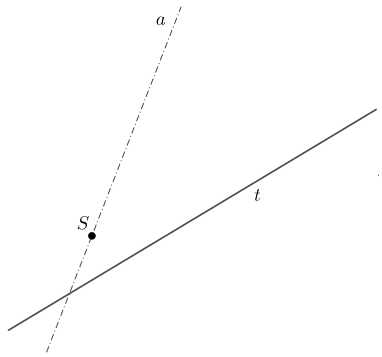
2) In der folgenden Figur sehen wir alle rechten Winkel angedeutet, und die Berührpunkte der Tangenten mit der Parabel, sowie die Parabel selbst, in der Figur ergänzt.



$\square$

Konstruktion 3.

Von einer Parabel sind die Achse a und der Scheitel S gegeben, sowie eine Tangente t. Konstruiere die dazu normale Tangente t^*, sowie die Berührpunkte von t und t^* mit der Parabel.

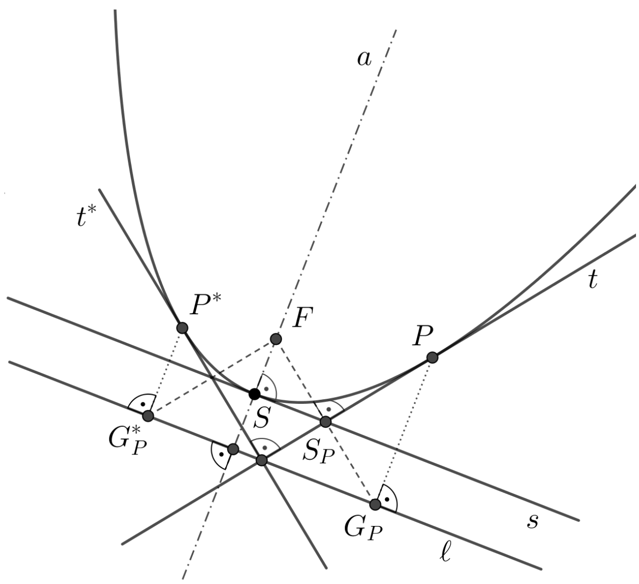


Lösung.

1) Wie in Konstruktion 1 erhalten wir die Scheiteltangente s als Normale zu a durch S. Die Scheiteltangente schneidet die gegebene Tangente t im Punkt S_P, und wir erhalten F als Schnittpunkt von a mit der Normalen zu t durch S_P.

2) Außerdem erhalten wir den Gegenpunkt G_P der Tangente t als symmetrischen Punkt zu F bezüglich S_P, womit wir auch die Leitlinie ℓ als Normale zu a durch G_P kennen, als auch den Berührpunkt P der Tangente t mit der Parabel als Schnittpunkt von t mit der Normalen zu ℓ durch G_P.

3) Da wir wissen, dass sich zwei zueinander normale Parabeltangenten auf ℓ scheiden, erhalten wir die zu t normale Tangente t^* als Normale zu t durch den Schnittpunkt von t mit ℓ.



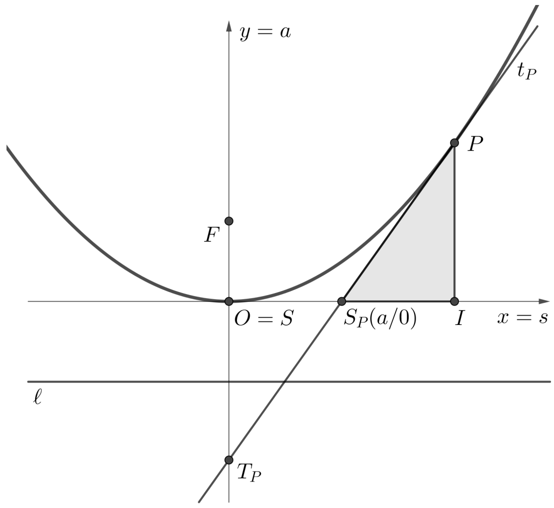
4) Den Gegenpunkt G_P^* dieser Tangente erhalten wir als symmetrischen Punkt zu F bezüglich t^*, und somit den Berührpunkt P^* von t^* mit der Parabel als Schnittpunkt von t^* mit der Normalen zu ℓ durch G_P^*.

□

EIGENSCHAFTEN DER SCHNITTPUNKTE VON PARABELTANGENTEN

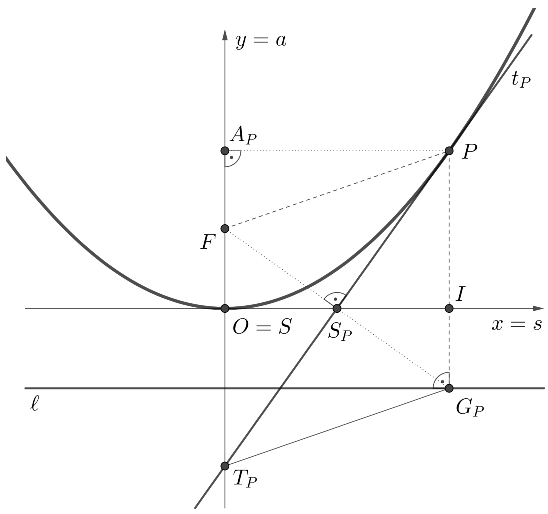
Die Tangentenmenge einer Parabel hat einige besonders spezielle Eigenschaften. Im Folgenden wollen wir uns mit diesen Besonderheiten ein wenig auseinandersetzen.

Zu diesem Zweck betrachten wir, wie in der Figur nebenan abgebildet, eine Parabel in Hauptlage mit Parameter p, also mit der Kurvengleichung $x^2 = 2py$. Ein Punkt P liegt auf dieser Parabel und t_P ist die Parabeltangente in P. Wie schon bisher, bezeichnen wir den Schnittpunkt von t_P mit der Scheiteltangente s (also in dieser speziellen Lage mit der x-Achse) als S_P.



Wie in der Figur angedeutet, wollen wir den Sachverhalt in Abhängigkeit der Koordinaten von S_P darstellen. Wir nehmen also an, der Punkt S_P habe die Koordinaten $S_P(a/0)$, wobei a einen beliebigen reellen Wert annehmen kann. (In der Figur ist $a > 0$ angenommen, aber die folgende Überlegung gilt auch für $a < 0$, und den Sonderfall $a = 0$ werden wir am Schluss auch noch als unproblematisch erkennen.)

In der Figur nebenan haben wir schon erkannt, dass die x-Koordinate von S_P genau halb so groß wie jene von P ist. Da wir nun a als x-Koordinate von S_P angenommen haben, ist die x-Koordinate von P gleich $2a$.



Da der Punkt P auf der Parabel liegt, gilt für die Koordinaten $P(x_P/y_P)$ von P die Bedingung

$$x_P^2 = 2py_P \iff (2a)^2 = 2py_P \iff y_P = \frac{2a^2}{p},$$

und der Punkt P hat somit die Koordinaten $P\left(2a/\frac{2a^2}{p}\right)$.

Damit kennen wir aber auch schon die Gleichung der Tangente t_P. Die y-Koordinate seines Schnittpunkts T_P mit der y-Achse ist, wie wir bereits überlegt haben, die negative y-Koordinate von P, also $-\frac{2a^2}{p}$, und die Steigung von t_P erhalten wir im grau dargestellten Steigungsdreieck S_PPI als

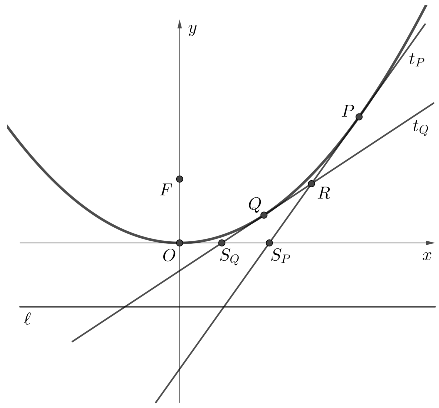
$$PI : S_PI = \frac{2a^2}{p} : a = \frac{2a}{p}.$$

Geradengleichung MmF

Dies ergibt somit die Geradengleichung

$$t_P : y = \frac{2a}{p} \cdot x - \frac{2a^2}{p}.$$

Schneiden wir nun zwei Parabeltengenten, deren Gleichungen wir auf diese Weise festgelegt haben, erhalten wir ein bemerkenswert einfaches Ergebnis. In der Figur nebenan sehen wir also zwei Parabeltangenten. Die Tangente t_P berührt die Parabel $x^2 = 2px$ im P und schneidet die x-Achse in $S_P(a/0)$ und die Tangente t_Q berührt die Parabel $x^2 = 2px$ im Q und schneidet die x-Achse in $S_Q(b/0)$.



Den Schnittpunkt der beiden Tangenten haben wir mit $t_P \cap t_Q = R$ bezeichnet. Da dieser Punkt R auf den beiden Geraden mit den Gleichungen

$$t_P : y = \frac{2a}{p} \cdot x - \frac{2a^2}{p} \quad \text{und} \quad t_Q : y = \frac{2b}{p} \cdot x - \frac{2b^2}{p}$$

liegt, gilt für die x-Koordinate x_R von R

$$\begin{aligned}\frac{2a}{p} \cdot x_R - \frac{2a^2}{p} = \frac{2b}{p} \cdot x_R - \frac{2b^2}{p} &\iff a \cdot x_R - a^2 = b \cdot x_R - b^2 \\ &\iff (a-b) \cdot x_R = a^2 - b^2 \\ &\iff x_R = a + b.\end{aligned}$$

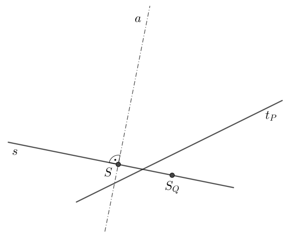
MmF

Die x-Koordinate vom Schnittpunkt der beiden Parabeltangenten, die die Scheiteltangente im (orientierten) Abstand a bzw. b vom Parabelscheitel S schneiden ist also die Summe $a + b$ dieser beiden Zahlen.

Aus dieser Tatsache können wir nun einige besonders schöne Parabelkonstruktionen ableiten. Zuerst betrachten wir folgende Konstruktion.

Konstruktion 4.

Von einer Parabel kennt man die Scheiteltangente s, und darauf den Scheitel S. Ferner kennt man eine Parabeltangente $t_P \neq s$ und einen Punkt S_Q auf s. Konstruiere die Parabeltangente ($\neq s$) durch S_Q. In der Figur sehen wir die Angabe, bestehend aus S, s, t_P und S_Q, sowie der Achse a, die durch den Scheitel S geht und normal zur Scheiteltangente s steht.



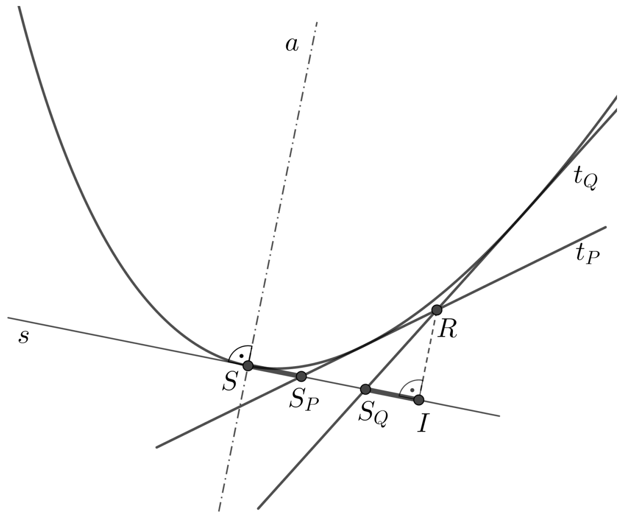
Lösung.

Man kann natürlich, wie in den bisher betrachteten Konstruktionen, den Brennpunkt F auf der Normalen zu t_P durch den Schnittpunkt von t_P mit s bestimmen, danach ℓ, und so die Konstruktion abschließen.
Einfacher ist allerdings die Anwendung der eben bestimmten Beziehung.

1) Zu diesem Zweck bezeichnen wir den Lotfußpunkt des Schnittpunkts R von t_P und der gesuchten Tangente t_Q auf s als I. Wir wissen, dass $SI = SS_P + SS_Q$ gilt, wobei S_P wieder der Schnittpunkt von t_P mit s ist.

2) Wie in der Figur durch dicke Strecken angedeutet ist, müssen wir nur die Länge der Strecke SS_P von S_Q abschlagen, und erhalten somit auf s diesen Punkt I.

3) Der Punkt R ist dann der Schnittpunkt von t_P mit der Normalen zu s durch I, und t_Q die Verbindungsgerade von S_Q mit R.



In der Figur ist auch die Parabel eingezeichnet, sodass man auch besser sehen kann, dass die beiden Geraden t_P und t_Q auch tatsächlich Tangenten der Parabel sind.

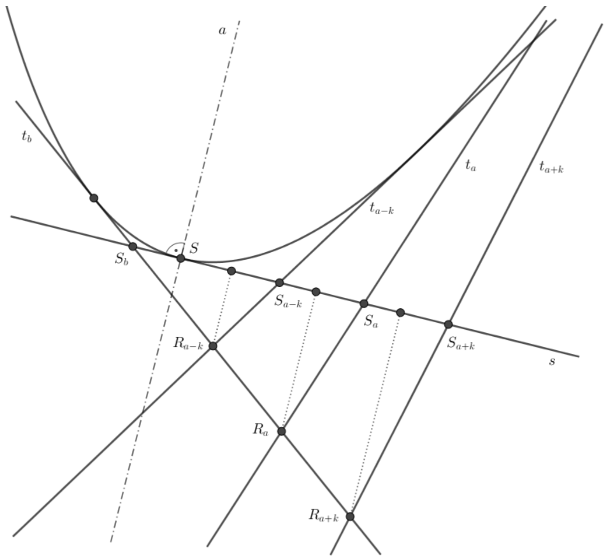
□

Fadenkonstruktion

Fadenkonstruktion

Nun haben wir auch schon alles vorbereitet, um die sogenannte *Fadenkonstruktion* der Parabel ableiten zu können. Dies ist eine Methode, mit sehr geringem Aufwand beliebig viele Tangenten einer Parabel grafisch zu erzeugen.

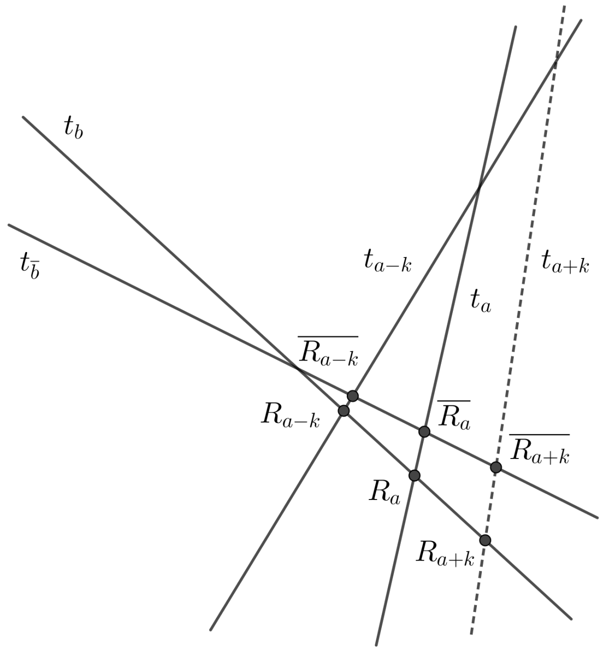
In der Figur nebenan sehen wir eine Parabel mit ihrem Scheitel S, ihrer Scheiteltangente s und ihrer Achse a, sowie einige ihrer Tangenten. Die Tangente t_a schneidet s im Punkt S_a, und ebenso erhalten wir den Schnitt von s mit den Tangenten t_{a-k} in S_{a-k}, t_{a+k} in S_{a+k} und t_b in S_b.



Denken wir uns, wie zuletzt, ein Koordinatensystem relativ zur Parabel, mit der x Achse in der Scheiteltangente s und dem Ursprung im Scheitel S, habe S_a die x-Koordinate a, und analog S_{a-k} die x-Koordinate $a-k$, S_{a+k} die x-Koordinate $a+k$ und S_b die x-Koordinate b. Bemerken wir, dass der Abstand von S_a zu S_{a-k} gleich groß ist wie der zu S_{a+k}. Wir wissen dann, dass die x-Koordinaten der Schnittpunkte R_a, R_{a-k} und R_{a+k} von t_a, t_{a-k} bzw. t_{a+k} mit t_b der Reihe nach $a+b$, $a+b-k$ und $a+b+k$ sind. Das hat zur Folge, dass der Lotfußpunkt von R_a auf s (also auf der x-Achse) denselben Abstand k von den Lotfußpunkten von R_{a-k} und R_{a+k} hat, und da die Lote zueinander parallel sind, sind auch die Abstände von R_a zu R_{a-k} und R_{a+k} aufgrund des Strahlensatzes gleich groß.

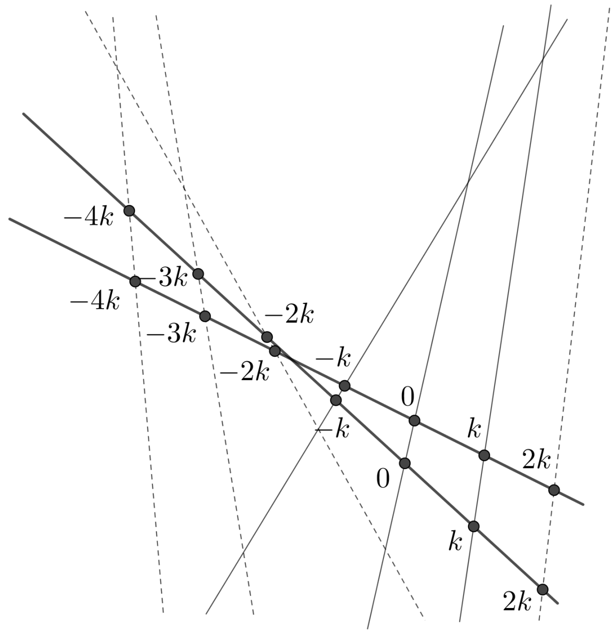
Dies gilt unabhängig vom Wert von b. Schneiden wir also verschiedene Parabeltangenten, die s in regelmäßigen Abständen k schneiden jeweils mit zwei Parabeltangenten t_b und $t_{\bar{b}}$, so haben die Schnittpunkte auf beiden Tangeten jeweils regelmäßige Abstände voneinander. Das bedeutet aber, dass wir die Situation umgekehrt betrachten können, wie in der folgenden Figur dargestellt.

In der Figur nebenan sehen wir vier Tangenten einer Parabel, nämlich einerseits t_a und t_{a-k} und andererseits t_b und $t_{\overline{b}}$. (Wir bemerken, dass die Bezeichnungen dieser Tangenten auch beliebig vertauscht werden könnten. Man kann beweisen, dass beliebige vier Geraden, von denen keine zwei zueinander parallel sind und von denen keine drei durch einen gemeinsamen Punkt gehen, immer eindeutig eine Parabel festlegen. Auf den Nachweis dieser Eindeutigkeit verzichten wir aber an dieser Stelle.)



Die Schnittpunkte von t_a und t_{a-k} mit t_b bezeichnen wir, wie zuletzt, als R_a bzw. R_{a-k}, und analog die mit $t_{\overline{b}}$ als $\overline{R_a}$ bzw. $\overline{R_{a-k}}$. Dazu kommen auch die symmetrischen Punkte R_{a+k} und $\overline{R_{a+k}}$. Wie eben überlegt, ist deren Verbindung t_{a+k}, die hier strichliert eingezeichnet ist, ebenfalls eine Tangente dieser Parabel.

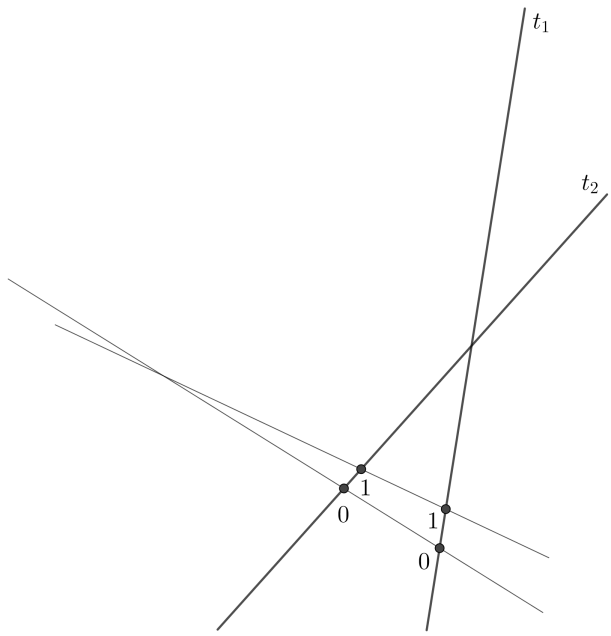
Nun ergibt eine Wiederholung dieser Idee sicher weitere Tangenten derselben Parabel. Dies ist in der Figur nebenan einige Male ausgeführt. Der einfacheren Bezeichnung halber, sind hier die Punkte auf t_b bzw. $t_{\overline{b}}$ nur mehr mit den jeweiligen additiven Vielfachen von k beschriftet, sodass die Verbindung von jeweils zwei Punkten mit derselben Beschriftung eine Parabeltangente ergibt.



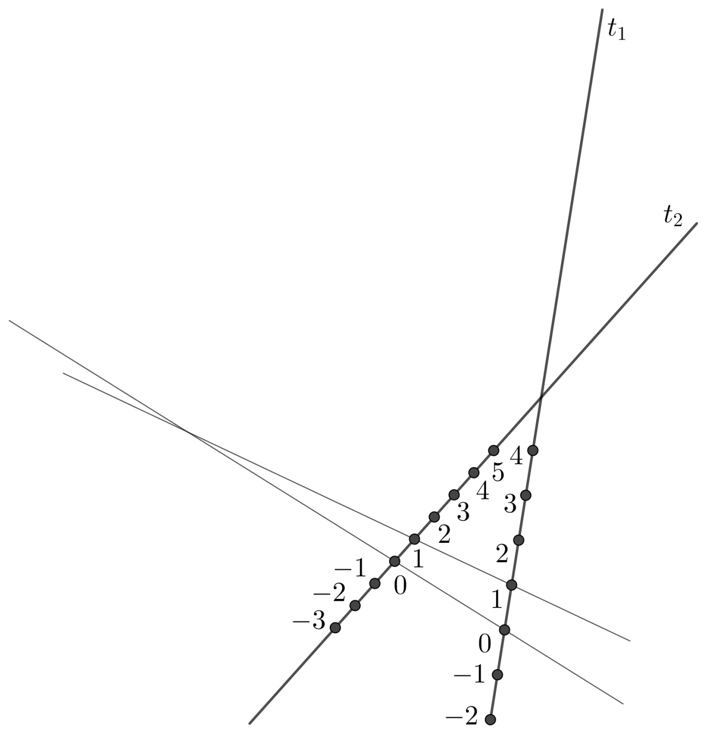
Wir tragen immer wieder den Abstand R_aR_{a-k} auf t_b auf, und analog den Abstand $\overline{R_aR_{a-k}}$ auf $t_{\overline{b}}$, und erhalten so, von den Punkten 0 ausgehend (d.h. auf t_b von R_a und auf $t_{\overline{b}}$ von $\overline{R_a}$) in einer Richtung die Punkte k, $2k$, usw., und in der anderen Richtung $-k$, $-2k$, $-3k$, usw.

Die übliche Fadenkonstruktion sehen wir nun in den folgenden Figuren.

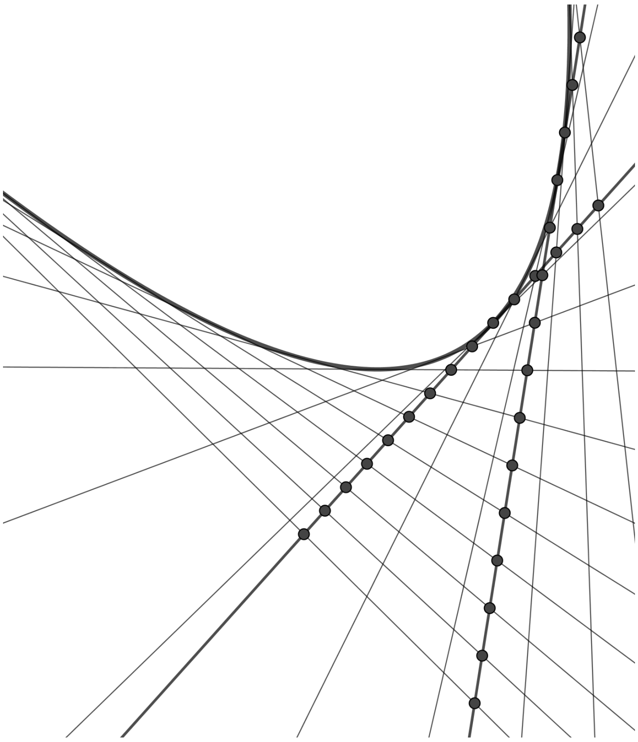
Hier sind, zwei Geraden t_1 und t_2 gegeben, und auf diesen beiden Geraden sind jeweils zwei Punkte markiert, die mit 0 bzw. 1 beschriftet sind. Wählen wir die Lage so, dass die Verbindungen der beiden Punkte 0 und der beiden Punkte 1 nicht parallel sind, erhalten wir vier Geraden, die wir als Tangenten einer gemeinsamen Parabel auffassen können. Es entspricht die Gerade t_1 in dieser Figur der Tangente t_b, die Gerade t_2 der Tangente $t_{\overline{b}}$, die Verbindungsgerade der beiden Punkte 0 der Tangente t_a und die Verbindungsgerade der beiden Punkte 1 der Tangente t_{a+k}.



Nun markieren wir der Reihe nach weitere Punkte auf t_1 und t_2, die der Reihe nach jeweils dieselben Abstände wie die jeweiligen Punkte 0 und 1 voneinander haben.



Verbinden wir nun die jeweils gleichnamigen Punkte auf den beiden Geraden, erhalten wir lauter Parabeltangenten als Verbindungsgeraden, wie in der Figur nebenan abgebildet.



Es ist noch bemerkenswert festzustellen, dass wir eigentlich nicht gleich lange Strecken jeweils auftragen müssten, da diese Konstruktion ja von Strahlensatz abgeleitet wurde. Es genügt also, wenn die Skalen auf den beiden Gerade t_1 und t_2 jeweils dieselben Teilverhältnisse ergeben, also zueinander ähnlich sind. Bei der üblichen Version der Fadenkonstruktion wird allerdings immer von jeweils gleich langen Strecken auf den beiden Ausgangsgeraden ausgegangen.