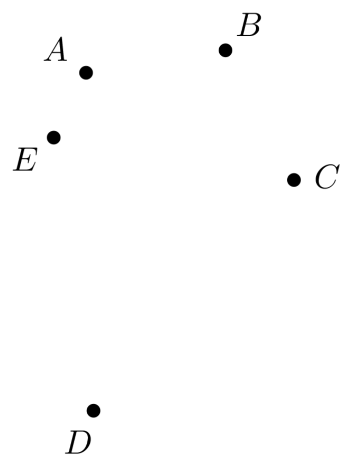
GRUNDLAGENBLATT – ELLIPSE DURCH FÜNF PUNKTE

Gegeben seien die fünf Punkte A, B, C, D und E, die so in der Ebene angeordnet seien, dass sie auf einer gemeinsamen Ellipse liegen. Wie wir am GB – Gemeinsame Eigenschaften der Kegelschnitte gesehen haben, liegen je fünf Punkte jedenfalls auf einer (eventuell zerfallenden) Kurve zweiten Grades, aber in folgender Figur sehen wir eine Anordnung, die dazu führen wird, dass die gegebenen Punkte auf einer gemeinsamen Ellipse liegen.

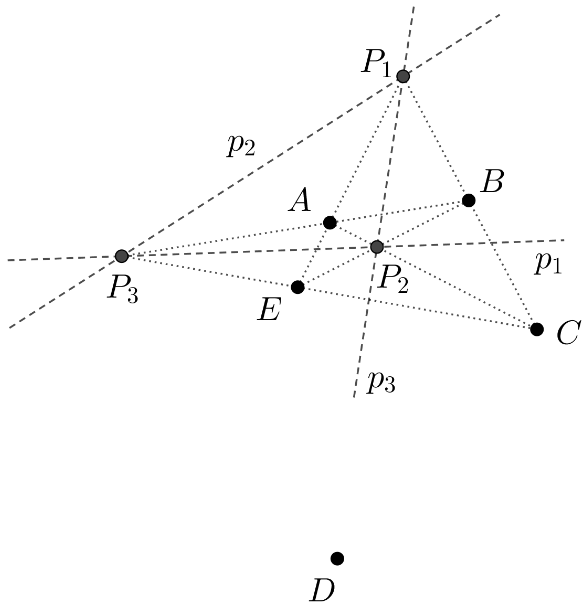


Datum: 17. November 2022.

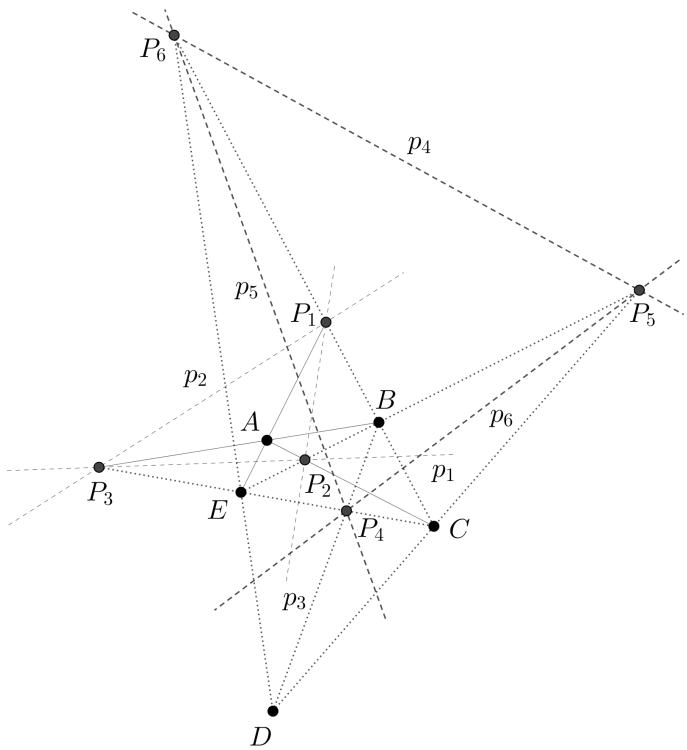
Konstruktion 1. Konstruiere die Kurve zweiten Grades durch die fünf Punkte A, B, C, D und E, die so in der Ebene angeordnet seien, dass sie auf einer gemeinsamen Ellipse liegen.

Lösung. Wie am GB – Gemeinsame Eigenschaften der Kegelschnitte besprochen, wissen wir, dass das Diagonalendreieck eines Sehnenvierecks in einem Kegelschnitt ein Poldreieck des Kegelschnitts ist.

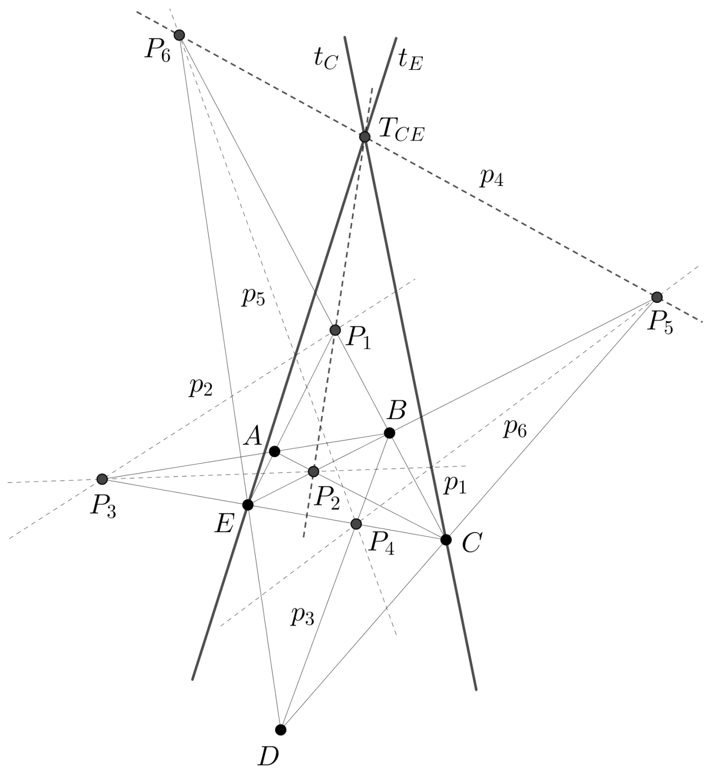
1) In der Figur ist das Diagonalendreieck $P_1P_2P_3$ des Sehnenvierecks $ABCD$ konstruiert worden und wir sehen, dass $p_1 = P_2P_3$ die Polare von P_1 bezüglich des zu bestimmenden Kegelschnitts ist, $p_2 = P_3P_1$ jene von P_2 Und $p_3 = P_1P_2$ jene von P_3.



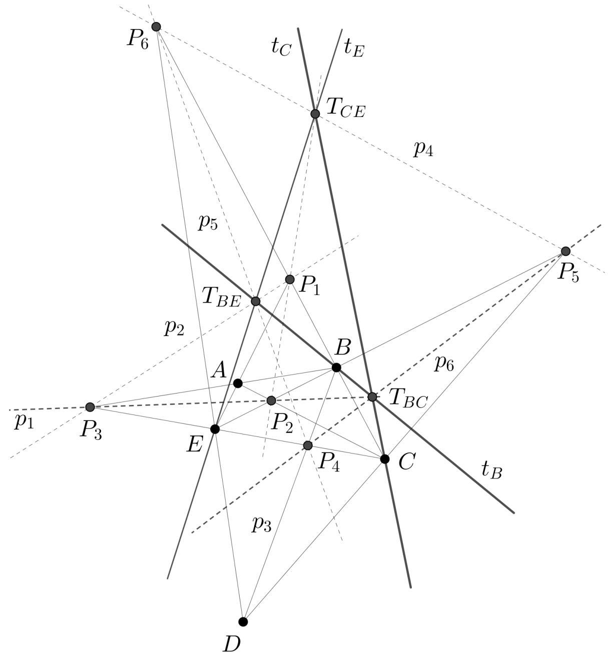
2) Auf gleiche Art ist in der Figur das Diagonalendreieck $P_4P_5P_6$ des Sehenenvierecks $BCDE$ ergänzt und auch dieses Dreieck ist ein Poldreieck des Kegelschnitts.



3) Wir konstruieren als Nächstes den Pol der Geraden $EC = P_3P_4$. Da die beiden Punkte P_3 und P_4 auf dieser Geraden liegen, ist ihr Pol der Schnittpunkt der Polaren p_3 und p_4 dieser beiden Punkte. Wir bezeichnen diesen Punkt als T_{CE}. Da die Punkte C und E Punkte des Kegelschnitts sind, erhalten wir dann sofort die Tangenten t_C und t_E an den Kegelschnitt in den Punkten C bzw. E als Verbindungsgeraden $t_C = CT_{CE}$ bzw. $t_E = ET_{CE}$ der Kegelschnittspunkte mit dem Pol der Verbindungssekante.

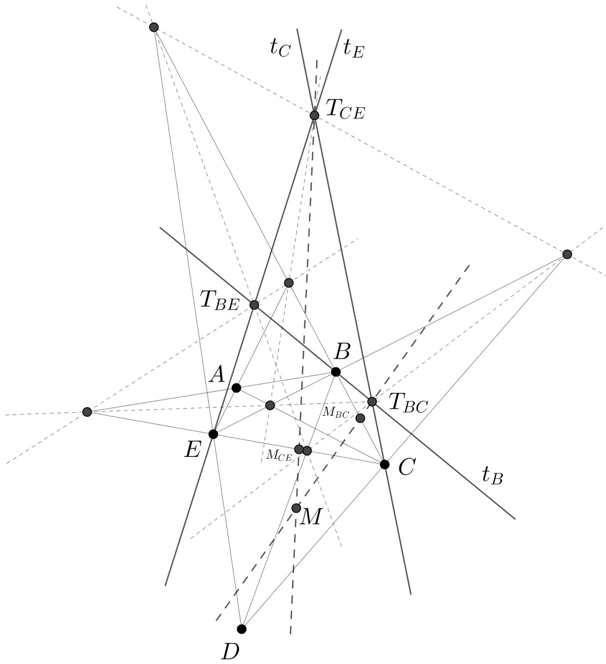


4) Auf völlig analoge Weise konstruieren wir die Kegelschnittstangente t_B in B. Wir erhalten den Pol T_{BE} der Kegelschnittssekante $BE = P_2P_5$ als Schnittpunkt der beiden Polaren p_2 und p_5 und den Pol T_{BC} der Kegelschnittssekante $BC = P_1P_6$ als Schnittpunkt der beiden Polaren p_1 und p_6. Die Tangente t_B in B ergibt sich dann wahlweise als Verbindungsgerade von B mit T_{BE} oder T_{BC}.



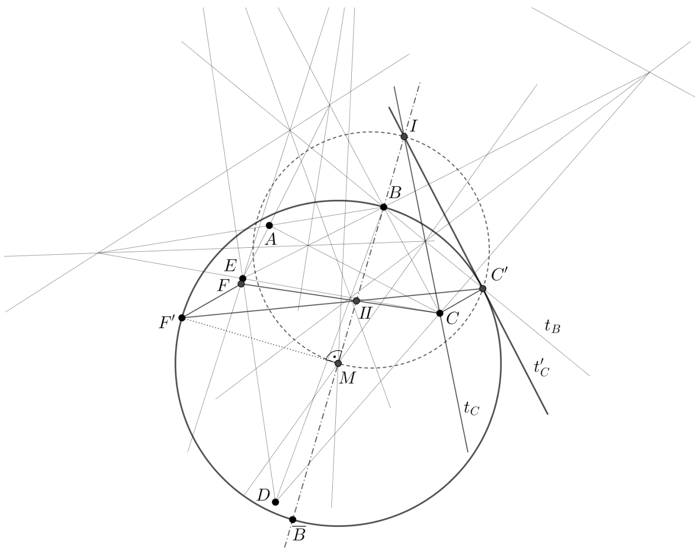
Nach der Erledigung dieser vorbereitenden Schritte können wir nun den Mittelpunkt des Kegelschnitts konstruieren. Zu diesem Zweck erinnern wir uns an die Situation bei Schritt 3. Dort haben wir erkannt, dass die Verbindungsgerade eines Punktes P mit dem Mittelpunkt O eines Kreises k die Polare von P bezüglich k genau im Mittelpunkt Q der Schnittsehne ST der Polare mit k schneidet. Wir wissen, dass wir eine Ellipse affin auf einen Kreis abbilden können, wobei der Mittelpunkt der Ellipse auf den Mittelpunkt des Kreises abgebildet wird, Pol und Polare der Ellipse auf Pol und Polare des Kreises abgebildet werden und der Mittelpunkt einer Strecke auf den Mittelpunkt der Bildstrecke abgebildet wird. Diese Eigenschaft gilt daher auch für Ellipsen.

5) Da T_{CE} die Polare von CE ist, liegt der Ellipsenmittelpunkt M somit auf der Verbindungsgeraden von T_{CE} mit dem Mittelpunkt M_{CE} der Strecke CE. Ebenso liegt M auf der Verbindungsgeraden von T_{BC} mit dem Mittelpunkt M_{BC} der Strecke BC, und wir erhalten M somit als Schnittpunkt dieser beiden Geraden.



Nun können wir die Konstruktion mit Hilfe der perspektiven Affinität vervollständigen, die die Ellipse auf einen Kreis abbildet, der mit der Ellipse einen Durchmesser gemeinsam hat. Diese Konstruktion haben wir bereits GB – Affinität zum Kreis mit gemeinsamem Durchmesser kennen gelernt. Zu diesem Zweck ist der Kreis mit Mittelpunkt M durch B eingezeichnet. Dieser Kreis hat sicher mit der Ellipse den Durchmesser MB gemeinsam, und dies ist somit die Affinitätsachse der erwähnten perspektiven Affinität.

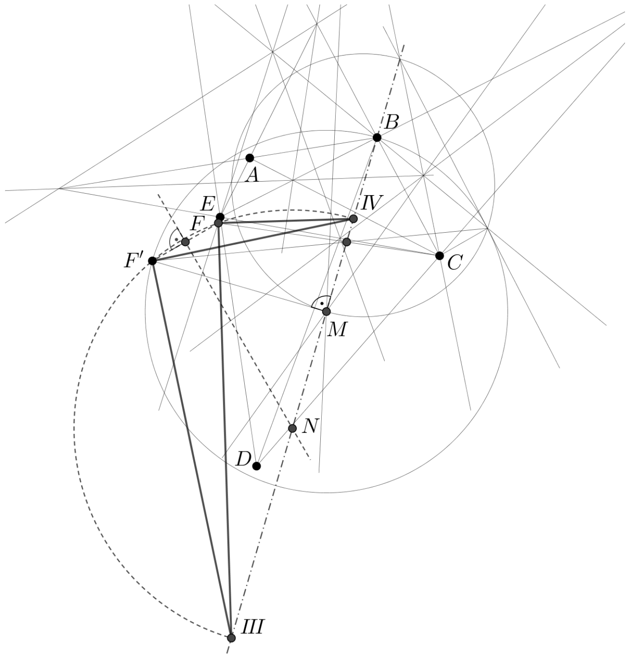
6) Um die Richtung der Affinitätsstrahlen zu bestimmen, schneiden wir die Tangente t_C mit dieser Affinitätsachse, und erhalten den Hilfspunkt I. Dies ist ein Fixpunkt der Affinität und die Tangente t_C der Ellipse wird auf eine Tangente des Kreises durch I abgebildet. Konstruieren wir also (mit Hilfe des Thaleskreises über die Strecke IM, da die Tangente normal zum Radius steht) die Tangente $t_{C'}$ durch I an den Kreis, erhalten wir mit dem Berührpunkt C' den Bildpunkt von C bei der perspektiven Affinität. Die Gerade CC' ist also ein Affinitätsstrahl der perspektiven Affinität.



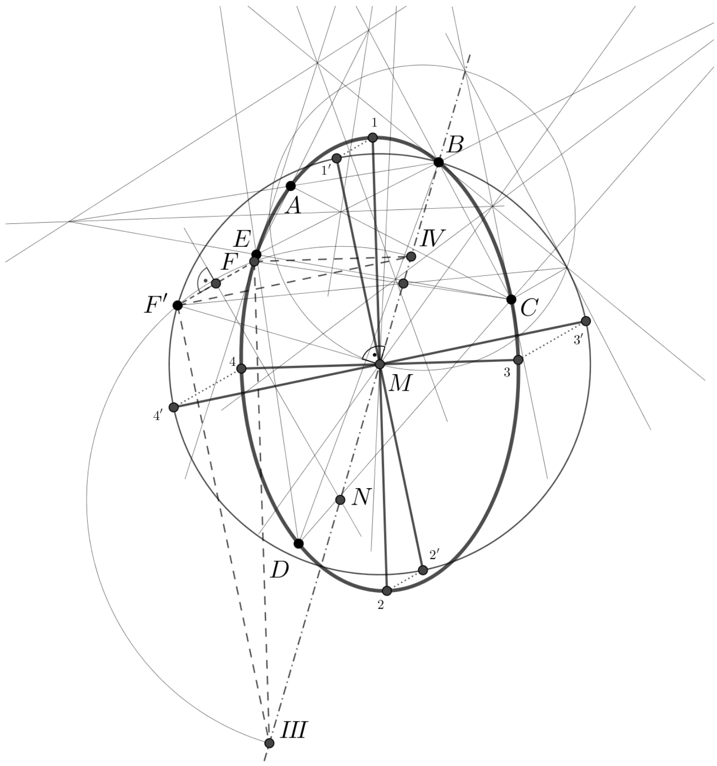
7) Der zu MB normale Durchmesser MF' des Kreises ist das Bild des zu MB konjugierten Durchmessers, und wir konstruieren daher F' als Schnittpunkt der Normalen zu $MB = MI$ mit dem Kreis, und anschließend das perspektiv affine Bild F von F' indem wir F' mit C' verbinden. Wir erhalten F somit als Schnittpunkt des Affinitätsstrahls durch F' mit der Verbindungsgeraden von C mit dem Fixpunkt

$I\!I = F'C' \cap BM$.

8) Wir konstruieren dann ein Paar von Geraden, die sich im Kreisfeld in F' normal schneiden, und deren Bilder sich im Ellipsenfeld in F normal schneiden. Dies erledigen wir, wie in Figur 1.61 in Abschnitt 1.10 bereits erklärt, indem wir die Streckensymmetrale von FF' mit der Affinitätsachse BM in N schneiden. Diesen Punkt N verwenden wir als Mittelpunkt eines Thaleskreises durch F und F', der BM in den Punkten $I\!I\!I$ und $I\!V$ schneidet. Die Affinität bildet dann das normale Geradenpaar $F'I\!I\!I$ und $F'I\!V$ auf das normale Geradenpaar $FI\!I\!I$ und $FI\!V$ ab.



9) Durch Parallelverschieben dieser vier Geraden durch M erhalten wir also schließlich die Achsen und Scheitel der Ellipse. Diese Geradenpaare sind ja diejenigen zueinander normalen Kreisdurchmesser, die auf zueinander normale konjugierte Ellipsendurchmesser abgebildet werden, also auf die Ellipsenachsen. Die Endpunkte $1'$, $2'$, $3'$ und $4'$ der Kreisdurchmesser sind diejenigen Punkte, die auf die Ellipsenscheitel abgebildet werden.



10) Wir erhalten somit die Ellipsenscheitel indem wir die Affinitätsstrahlen durch diese Punkte jeweils mit den Ellipsenachsen schneiden, womit wir die gesuchten Achsen und Scheitel der Ellipse konstruiert haben.

□