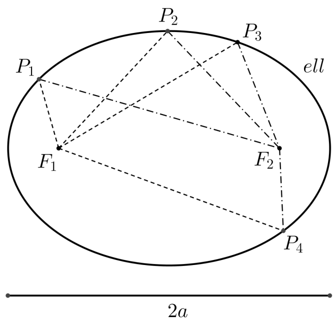
GRUNDLAGENBLATT – ELLIPSENDEFINITION

Fragen & Antworten auf diesem Grundlagenblatt

✓ Was ist eine **Ellipse**?
✓ Wie sind die Begriffe Brennpunkte und Hauptachsenlänge definiert?
✓ Wie konstruiert man einen Punkt auf einer Ellipse?
✓ Wie konstruiert man Nebenscheitel und Hauptscheitel einer Ellipse?

Ellipse

In der Euklidischen Ebene seien zwei Punkte F_1 und F_2, sowie eine Strecke der Länge $2a$ gegeben. Unter einer **Ellipse** versteht man die Menge aller Punkte mit der Eigenschaft, dass die Summe ihrer Abstände zu den beiden gegebenen Punkten F_1 und F_2 gleich $2a$ ist.



In obiger Figur sehen wir die Ellipse ell, die sich aus der Vorgabe der beiden abgebildeten Punkte F_1 und F_2 und der abgebildeten Streckenlänge $2a$ ergibt. Alle vier exemplarisch eingezeichnete Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 haben die Eigenschaft, dass die Summe der Längen ihrer jeweils strichliert gezeichneten Verbindungsstrecke zu F_1 und ihrer jeweils strich-punktiert gezeichneten Verbindungsstrecke zu F_2 gleich $2a$ ist. (Dies kann man durch Messung auch leicht bestätigen.)

Brennpunkt und Hauptachsenlänge

Die beiden Punkte F_1 und F_2 bezeichnet man als **Brennpunkte** der Ellipse.

Die Bezeichnung F leitet sich aus dem lateinischen Namen **focus** für einen Brennpunkt ab.

Die Streckenlänge $2a$ wird als **Hauptachsenlänge** bezeichnet.

Der Grund für diese etwas eigentümlich erscheinende Wahl der Bezeichnung (warum nicht gleich a statt $2a$?) wird im Zusammenhang mit der algebraischen Darstellung der Kurve ersichtlich werden.

Bevor wir uns in die Details der Konstruktionen stürzen, die sich aus dieser Definition ergeben, ist es sicher hilfreich, wenn wir uns einige übliche Sprech- und Schreibweisen vor Augen führen, und ein paar erste, ganz einfache Eigenschaften der Ellipse festhalten.

Datum: 17. November 2022.

Ellipse als Punktmenge und gleichzeitig als Kurve

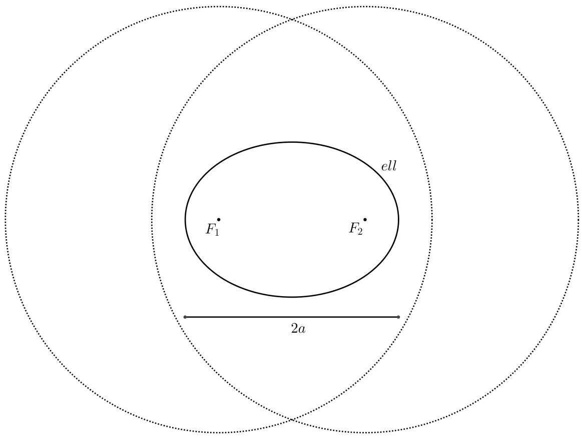
Wir haben zunächst die Ellipse als Menge aller Punkte in der Euklidischen Ebene E^2 mit einer bestimmten Eigenschaft definiert. Bei Vorgabe der Punkte F_1 und F_2 und der Streckenlänge $2a$ können wir diese Menge auch kurz als folgende Punktmenge in E^2 anschreiben:

$$\{P; PF_1 + PF_2 = 2a\}$$

Sofort fällt auf, dass wir zwei grundlegend unterschiedliche Ideen miteinander verbinden. Einerseits sprechen wir von „einer Ellipse“, also einem einzigen Objekt, einer **Kurve**, während wir andererseits von der Ellipse als Punktemenge sprechen, also der (unendlich vielen) Punkte mit dieser Eigenschaft.

Diese Freiheit, nämlich die Möglichkeit, die Ellipse wahlweise als Kurve oder als Punktmenge aufzufassen, wird sich für unsere weiteren Überlegungen als sehr hilfreich herausstellen.

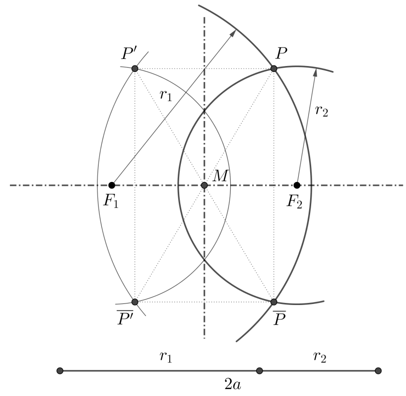
Wie wir sehen können, liegt die Ellipse zur Gänze im inneren Bereich der beiden Kreise mit Radius $2a$ und den Mittelpunkten F_1 bzw. F_2. Dies ergibt sich unmittelbar aus der Definition, da ja zum Abstand eines Ellipsenpunkts P zu einem dieser Brennpunkte immer etwas dazugezählt werden muss, um die Gesamtlänge $2a$ zu erreichen.



Die Abstände von P sowohl zu F_1 als auch zu F_2 können also sicher nicht größer als $2a$ sein, womit P sicher im Inneren der beiden genannten Kreise liegen muss. Die Ellipse ist also als Punktmenge unendlich (da sie aus unendlich vielen Punkten mit einer bestimmten Eigenschaft besteht), aber in ihrer Ausdehnung endlich (d.h. begrenzt), da sie sich zur Gänze im Inneren eines Kreises (sogar im Inneren zweier Kreise) befindet. Mit diesen beiden Kreisen, jeweils mit Radius $2a$ und Mittelpunkt in einem Ellipsenbrennpunkt, werden wir uns in weiterer Folge noch intensiver beschäftigen.

Konstruktion 1. Konstruiere einen Punkt P auf der Ellipse mit Brennpunkten F_1 und F_2 und Hauptachsenlänge $2a$.

Lösung. Es ist nicht schwer, eine euklidische Konstruktion von Ellipsenpunkten unmittelbar aus der Definition abzuleiten. Wir erkennen in diesem Zusammenhang auch sofort, dass die Ellipse zwei zueinander normale Symmetrieachsen besitzt. Dies ist in folgender Figur abgebildet, die gleichzeitig auch die Konstruktion eines Punktes P darstellt.



1) Es sind die beiden Brennpunkte F_1 und F_2, sowie die Hauptachsenlänge $2a$ gegeben, und die unten gegebene Strecke der Länge $2a$ ist durch einen Teilungspunkt in zwei Teilstrecken mit den Längen r_1 bzw. r_2 geteilt.

2) Der Punkt P ist als Schnittpunkt des Kreises mit Mittelpunkt F_1 und Radius r_1 mit dem Kreis mit Mittelpunkt F_2 und Radius r_2 konstruiert.

Da der Abstand von P zu F_1 gleich r_1 ist, und der Abstand von P zu F_2 gleich r_2, ist die Summe der Abstände von P zu den beiden Brennpunkten gleich $r_1 + r_2 = 2a$, womit P sicher ein Punkt der Ellipse ist. $\square$

Mit dieser Konstruktion ergibt sich aber auch der Punkt $\overline{P}$ als zweiter Schnittpunkt der beiden Konstruktionskreise. Da das Argument von P auf identische Art für $\overline{P}$ gilt, ist $\overline{P}$ auch ein Punkt der Ellipse. Es liegen aber die beiden Schnittpunkte zweier Kreise immer symmetrisch bezüglich der Verbindungsgeraden der beiden Kreismittelpunkte. Somit liegen die Punkte P und $\overline{P}$ symmetrisch bezüglich der Verbindungsgeraden von F_1 und F_2. Dies sind aber die Mittelpunkte aller derartigen Kreise, und wir sehen, dass es zu jedem Punkt P der Ellipse einen weiteren, bezüglich F_1F_2 symmetrischen, Punkt $\overline{P}$ gibt.

Hauptachse

Die Gerade F_1F_2 durch die beiden Brennpunkte einer Ellipse ist eine Symmetrieachse der Ellipse. Wir bezeichnen diese Gerade als **Hauptachse** der Ellipse.

Nun sind aber auch die Rollen der beiden Brennpunkte F_1 und F_2 austauschbar. In der Figur zu Konstruktion 1 wurde zur Konstruktion von P die längere Strecke r_1 als Radius des Konstruktionskreises mit Mittelpunkt F_1 verwendet, und die kürzere r_2 als Radius des Kreises mit Mittelpunkt F_2. Dies kann aber natürlich auch umgekehrt durchgeführt werden, was zu den beiden abgebildeten Ellipsenpunkten P' und $\overline{P'}$ führt. Diese beiden Konstruktionskreise sind symmetrisch bezüglich der Streckensymmetrale von F_1F_2, und die Punkte P' und $\overline{P'}$ liegen daher symmetrisch zu P bzw. $\overline{P}$ bezüglich dieser Geraden. Da dies für alle auf diese Weise konstruierten Punkte der Ellipse gilt, ist die Streckensymmetrale von F_1F_2 daher ebenfalls eine Symmetrieachse der Kurve.

Nebenachse

Die Punkt F_1 und F_2 seien die Brennpunkte einer Ellipse. Dann wird die Streckensymmetrale von F_1F_2 als **Nebenachse** der Ellipse bezeichnet.

Die beiden Symmetrieachsen sind als Verbindungsgerade von F_1 und F_2 bzw. Streckensymmetrale von F_1F_2 sicher zueinander normal.

Da die Kurve zwei zueinander normale Symmetrieachsen besitzt, ist der Schnittpunkt der beiden Achsen, der in der Figur zu Konstruktion 1 als M beschriftet ist, Symmetriezentrum der Kurve. Natürlich folgt die Punktsymmetrie der Kurve mit diesem Symmetriezentrum auch unmittelbar aus der Symmetrie der Konstruktionskreise von P und $\overline{P}$ bzw. P' und $\overline{P'}$ bezüglich M.

Mittelpunkt

Die Punkte F_1 und F_2 seien die Brennpunkte einer Ellipse. Dann wird der Mittelpunkt von F_1F_2 als **Mittelpunkt** der Ellipse bezeichnet.

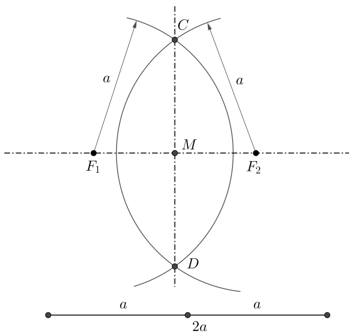
Die drei Symmetrien sind in der Figur zu Konstruktion 1 durch das Rechteck $PP'\overline{P'}\overline{P}$ und seine beiden Diagonalen angedeutet.

Nun stellt sich die Frage, ob es Ellipsenpunkte gibt, die auf den Symmetrieachsen liegen (sogenannte **Scheitel** der Ellipse), und wenn ja, wie man diese konstruktiv bestimmen kann.

Konstruktion 2 (Nebenscheitel der Ellipse)**.** Gegeben sei eine Ellipse mit Brennpunkten F_1 und F_2 und Hauptachsenlänge $2a$. Konstruiere Punkte, die sowohl auf der Ellipse als auch auf der Nebenachse liegen.

Lösung. Punkte, die sowohl auf der Ellipse als auch auf deren Nebenachse liegen, erhalten wir, wie in nachstehender Figur abgebildet, mit einer sehr naheliegenden Beobachtung: Alle Punkte der Streckensymmetrale einer Strecke haben von den beiden Endpunkten dieser Strecke den gleichen Abstand.

1) Die Schnittpunkte C und D der beiden Kreise mit Radius a und Mittelpunkten in F_1 bzw. F_2 schneiden einander also sicher in Punkten der Nebenachse der Ellipse, also der Streckensymmetrale von F_1F_2, da ihre Abstände zu F_1 und zu F_2 sicher gleich sind.



Diese beiden Punkte liegen aber wegen $a + a = 2a$ auch sicher auf der Ellipse, da die Summe ihrer Abstände zu den beiden Brennpunkten, wie für alle Ellipsenpunkte definitionsgemäß gefordert, gleich $2a$ ist. □

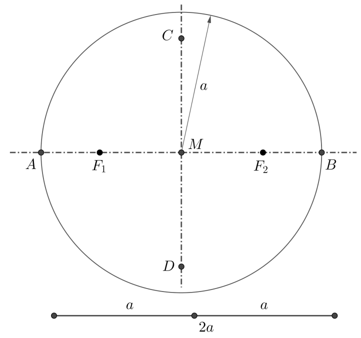
Nebenscheitel

Die Punkte C und D werden als Kurvenscheitel, die auf der Nebenachse liegen, als **Nebenscheitel** der Ellipse bezeichnet.

Konstruktion 3 (Hauptscheitel der Ellipse)**.** Gegeben sei eine Ellipse mit Brennpunkten F_1 und F_2 und Hauptachsenlänge $2a$. Konstruiere Punkte, die sowohl auf der Ellipse als auch auf der Hauptachse liegen.

Lösung. Es ist auch überraschend einfach, die Punkte der Ellipse zu konstruieren, die auf der Hauptachse F_1F_2 liegen. Zu diesem Zweck müssen wir nur, wie in der Figur abgebildet, die beiden Punkte der Hauptachse konstruieren, die zum Mittelpunkt M den Abstand a haben.

1) Wir schneiden also den Kreis mit Radius a und Mittelpunkt M mit der Geraden F_1F_2. Auf diese Weise erhalten wir zwei Punkte A und B.



Warum liegen aber diese Punkte auf der Ellipse?
Um dies zu zeigen, müssen wir nachweisen, dass sie der Ellipsendefinition genügen. Mit anderen Worten, wir müssen zeigen, dass die Summe ihrer Abstände zu den beiden Brennpunkten jeweils gleich $2a = AB$ ist. Für den Punkt A, zum Beispiel, muss also nachgewiesen, dass $AF_1 + AF_2 = 2a$ gilt.

Dies folgt aber unmittelbar aus der Tatsache, dass M einerseits als Schnittpunkt der Streckensymmetrale von F_1F_2 mit F_1F_2 der Mittelpunkt der Strecke F_1F_2 ist, und andererseits als Mittelpunkt des Kreises mit Durchmesser AB auch der Mittelpunkt von AB. Dies hat zur Folge, dass die beiden Strecken F_1A und F_2B symmetrisch liegen bezüglich M, und daher gleiche Länge haben. Wir erhalten also für den Punkt A:

$$AF_1 + AF_2 = BF_2 + AF_2 = AB = 2a$$

Der Punkt A genügt also tatsächlich der Ellipsendefinition, und ist somit ein Punkt der Kurve. Dieses Argument gilt aus Symmetriegründen auf vollkommen analoge Art auch für den Punkt B. Die beiden Punkte A und B werden als Kurvenscheitel, die auf der Hauptachse liegen, als **Hauptscheitel** der Ellipse bezeichnet. □

Darstellung der Ellipse

Zusammenfassend sehen wir also die Kurve mit ihren beiden Symmetrieachsen, allen vier Scheiteln, den beiden Brennpunkten und dem Mittelpunkt. Die Strecke AB hat die Länge $2a$.