GRUNDLAGENBLATT – ELLIPSENGLEICHUNG

Fragen & Antworten auf diesem Grundlagenblatt

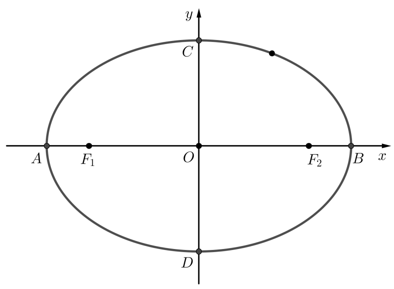
- ✓ Was bedeuten Exzentrizität und Nebenachsenlänge einer Ellipse?
- ✓ Wie sind Ellipsen in erster und zweiter Hauptlage charakterisiert?
- ✓ Wie lautet die **Ellipsengleichung** für Ellipsen in erster bzw. in zweiter Hauptlage?

Wie wir vom GB – Ellipsendefinition wissen, ist die Ellipse als Punktmenge

$$\{P; PF_1 + PF_2 = 2a\}$$

definiert, wobei F_1 und F_2 die Brennpunkte der Ellipse sind, und a die Hauptachsenlänge. Wir haben dort auch schon festgestellt, dass die Verbindungsgerade F_1F_2 und die Streckensymmetrale von F_1F_2 Symmetrieachsen der Ellipse sind. Die Ellipsenpunkte A und B auf der Hauptachse F_1F_2 haben wir als die Hauptscheitel der Ellipse bezeichnet, und die Ellipsenpunkte C und D auf der Streckensymmetrale von F_1F_2, also der Nebenachse der Ellipse, haben wir als Nebenscheitel der Ellipse bezeichnet.

In nebenstehender Figur haben wir die beiden Punkte F_1 und F_2 in ein Koordinatensystem eingebettet, wobei wir die Koordinaten $F_1(-e/0)$ und $F_2(e/0)$ annehmen. Die Zahl $e > 0$ bezeichnen wir als **Exzentrizität** der Ellipse. Dadurch liegen die Punkte A, B, F_1 und F_2 auf der x-Achse und die Punkte C und D auf der y-Achse.



Der Mittelpunkt der Ellipse ist auch der Mittelpunkt der Strecke F_1F_2 und liegt daher im Koordinatenursprung. Da die Abstände der Hauptscheitel vom Mittelpunkt gleich a sind, erhalten wir die Koordinaten $A(-a/0)$ und $B(a/0)$ für die Hauptscheitel.

Nebenachsenlänge

Da C und D symmetrisch bezüglich des Ellipsenmittelpunkts liegen, gibt es eine positive Zahl b mit $C(0/b)$ und $D(0/-b)$. Für diese Zahl b, die wir als **Nebenachsenlänge** bezeichnen, können wir auch sofort einen Zusammenhang zu den bisher eingeführten Größen ableiten.

Datum: 17. November 2022.

Charakterisierung „erste Hauptlage“

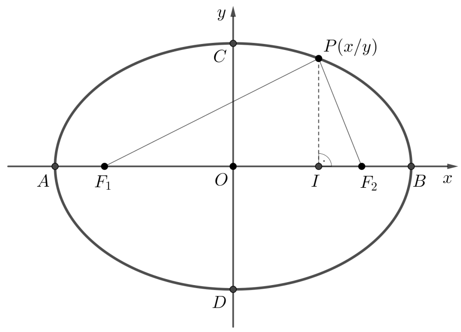
Vom GB – Ellipsendefinition wissen wir bereits, dass der Abstand von F_2 zu C gleich a ist, und im rechtwinkeligen Dreieck OF_2C gilt daher

$$OC^2 = F_2C^2 - OF_2^2 \iff b^2 = a^2 - e^2.$$

Diese Lage der Ellipse relativ zu den Koordinatenachsen bezeichnen wir als **erste Hauptlage** der Ellipse.

Nun nehmen wir an, ein allgemeiner Punkt P der Ellipse sei eingezeichnet, wobei seine Koordinaten mit $P(x/y)$ als variabel angenommen werden.

In der nebenstehenden Figur haben wir $0 < x < e$ und $0 < y < b$ angenommen, aber die folgenden Überlegungen gelten mit Vorzeichenänderungen für alle möglichen Lagen von P.



Der Hilfspunkt I sei der Punkt auf der x-Achse mit den Koordinaten $I(x/0)$.
Die Dreiecke F_1IP und IF_2P sind dann rechtwinkelig, und ihre Kathetenlängen kennen wir mit

$$F_1I = e + x, \quad IP = y \quad \text{und} \quad IF_2 = e - x.$$

Nun wissen wir, dass P genau dann ein Punkt der Ellipse ist, wenn

$$F_1P + F_2P = 2a$$

gilt. Dies ist gleichwertig mit

$$\begin{aligned} &\sqrt{F_1I^2 + IP^2} + \sqrt{IF_2^2 + IP^2} = 2a \\ \iff &\sqrt{(e+x)^2 + y^2} + \sqrt{(e-x)^2 + y^2} = 2a \\ \iff &\sqrt{(e+x)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(e-x)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Da der Term $2a - \sqrt{(e-x)^2 + y^2} > 0$ ist, ist das Quadrieren dieser Gleichung eine Äquivalenzumformung. Also ist diese Gleichung gleichwertig mit

$$\begin{aligned} &(e+x)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(e-x)^2 + y^2} + (e-x)^2 + y^2 \\ \iff &e^2 + 2ex + x^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(e-x)^2 + y^2} + e^2 - 2ex + x^2 + y^2 \\ \iff &4a\sqrt{(e-x)^2 - y^2} = 4a^2 - 4ex \\ \iff &a\sqrt{(e-x)^2 + y^2} = a^2 - ex. \end{aligned}$$

Abermals erhalten wir durch Quadrieren die gleichwertige Gleichung

$$
\begin{aligned}
& a^2((e-x)^2+y^2) = a^4 - 2a^2ex + e^2x^2 \\
\iff\ & a^2(e^2 - 2ex + x^2 + y^2) = a^4 - 2a^2ex + e^2x^2 \\
\iff\ & a^2e^2 - 2a^2ex + a^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2ex + e^2x^2 \\
\iff\ & (a^2-e^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2e^2 = a^2(a^2-e^2).
\end{aligned}
$$

Wir nutzen nun in der Gleichung $(a^2-e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-e^2)$, dass für eine Ellipse in erster Hauptlage der Zusammenhang $a^2 - e^2 = b^2$ gilt.
Wir erhalten somit die zur Ausgangsgleichung $F_1P + F_2P = 2a$ äquivalente Gleichung

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Gleichung der Ellipse in erster Hauptlage

Wir erkennen also, dass ein Punkt mit den Koordinaten $P(x/y)$ genau dann auf der Ellipse in erster Hauptlage mit Achsenlängen a und b liegt, wenn

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

gilt. Dividiert man diese Gleichung durch den Faktor a^2b^2, erkennt man, dass dies gleichwertig mit der Gültigkeit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

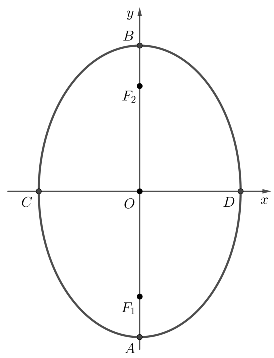
ist. Den Ausdruck

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

bezeichnet man als **Gleichung der Ellipse** in erster Hauptlage.

Charakterisierung der Ellipse in zweiter Hauptlage

Vertauschen wir die Rollen der Koordinatenachsen und nehmen an, dass die Brennpunkte durch $F_1(0/-e)$ und $F_2(0/e)$ gegeben seien, erhalten wir die Situation, die in nebenstehender Figur abgebildet ist. Diese Lage der Ellipse relativ zu den Koordinatenachsen bezeichnen wir als die **zweite Hauptlage**.



Da man die Ableitung der Ellipsengleichung in diesem Fall vollkommen analog zu der für die erste Hauptlage, unter Vertauschung der Rollen von x und y, durchführen kann, erhalten wir in diesem Fall die Ellipsengleichung

$$a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2 \iff \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$