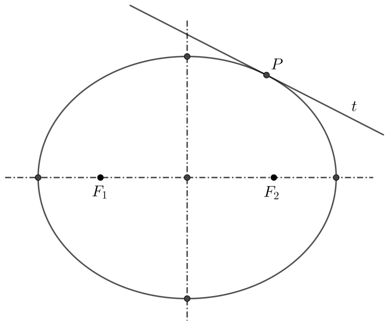
GRUNDLAGENBLATT – ELLIPSENTANGENTEN

Fragen & Antworten auf diesem Grundlagenblatt

- ✓ Wie ist eine **Ellipsentangente** definiert?
- ✓ Wie konstruiert man eine Tangente eines gegebenen Ellipsenpunktes?
- ✓ Wie sind die beiden **Gegenkreise** einer Ellipse definiert?
- ✓ Wie kann man eine Ellipse mit Hilfe eines Gegenkreises punktweise konstruieren?

Tangente einer Ellipse

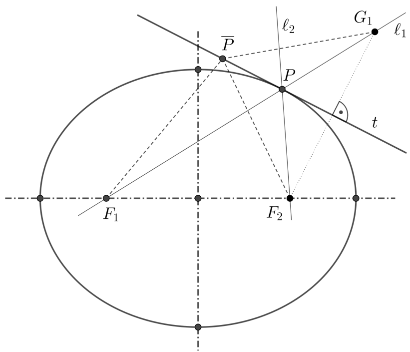
Unter einer **Tangente** einer Ellipse versteht man eine Gerade t, die mit der Ellipse genau einen Punkt P gemeinsam hat. Man sagt, die Tangente **berührt** die Ellipse im Punkt P, den man als den **Berührpunkt** von t mit der Ellipse bezeichnet.



Konstruktion 1 (Ellipsentangente)**.** Konstruiere die Tangente im Punkt P einer Ellipse mit Brennpunkten F_1 und F_2 und Hauptachsenlänge $2a$.

Lösung. Kennt man einen Punkt P einer Ellipse, und die beiden Brennpunkte F_1 und F_2, ist es nicht schwer, die Tangente der Ellipse in P zu konstruieren.

1) Die Tangente t in P ist nämlich die Winkelsymmetrale der schneidenden Geraden PF_1 und PF_2, die die Strecke F_1F_2 nicht scheidet.
Die beiden Geraden $PF_1 = \ell_1$ und $PF_2 = \ell_2$ bezeichnet man als die **Leitstrahlen** von P.



Wir wollen diese Tatsache mithilfe der abgebildeten Figur begründen.

Datum: 17. November 2022.

Nehmen wir an, t wäre die Winkelsymmetrale der beiden Geraden ℓ_1 und ℓ_2, die die Strecke F_1F_2 nicht schneidet. (Wir erinnern uns daran, dass die andere Winkelsymmetrale dieser beiden Geraden zu dieser normal steht, und daher die *Ellipsennormale* in P sein wird.) Die Gerade t hat auf jeden Fall den Punkt P mit der Ellipse gemein. Wenn wir zeigen können, dass es keinen weiteren Punkt von t geben kann, der gleichzeitig auf der Ellipse liegt, so muss t die Tangente der Ellipse in P sein.

Nehmen wir also an, es gäbe einen weiteren Punkt $\overline{P} \neq P$ von t, der auch auf der Ellipse liegt. Das bedeutet, dass dieser Punkt die Ellipsendefinition erfüllt, und es muss daher

$$\overline{P}F_1 + \overline{P}F_2 = 2a$$

gelten. Wir werden zeigen, dass diese Annahme jedenfalls zu einem Widerspruch führt.

Da der Punkt P auf der Ellipse liegt, gilt sicher

$$PF_1 + PF_2 = 2a.$$

Nun betrachten wir den Punkt G_1, der symmetrisch zu F_2 bezüglich t liegt. Wir bezeichnen diesen Punkt als ersten **Gegenpunkt** von P bezüglich der Ellipse. Mit den Punkten F_2 und G_1 liegen auch die Strecken PF_2 und PG_1 symmetrisch bezüglich t, und diese beiden Strecken sind daher sicher gleich lang. Da außerdem t sowohl die Streckensymmetrale von F_2G_1 als auch die Winkelsymmetrale von $\angle \ell_1 \ell_2$ ist, liegt G_1 sicher auf der Geraden ℓ_1. Es folgt also, dass G_1 auf der Geraden ell_1 liegt, mit

$$F_1G_1 = F_1P + PG_1 = F_1P + PF_2 = 2a.$$

Nun kehren wir zum Punkt $\overline{P} \neq P$ auf t zurück. Wir haben angenommen, dass die Punkt auf der Ellipse liegt, was bedeutet, dass $\overline{P}F_1 + \overline{P}F_2 = 2a$ gilt. Da $\overline{P}$ auf t liegt, und F_2 und G_1 bezüglich t symmetrisch liegen, liegen auch die Strecken $\overline{P}F_2$ und $\overline{P}G_1$ symmetrisch bezüglich t, womit $\overline{P}F_2 = \overline{P}G_1$ gilt. Daraus folgt aber auch

$$\overline{P}F_1 + \overline{P}G_1 = \overline{P}F_1 + \overline{P}F_2 = 2a.$$

Die drei Punkte $\overline{P}$, F_1 und G_1 bilden aber ein Dreieck, da wir $\overline{P} \neq P$ angenommen haben, und es gilt somit die Dreiecksungleichung

$$\overline{P}F_1 + \overline{P}G_1 > F_1G_1 = 2a,$$

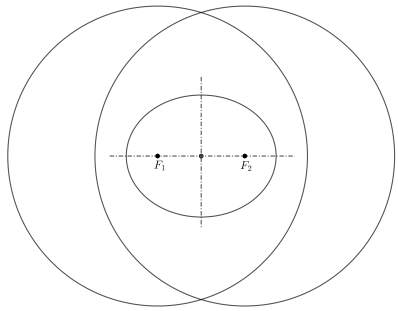
im Widerspruch zur Annahme. Es kann also keinen derartigen Punkt $\overline{P}$ geben, womit t eine Tangente der Ellipse ist. $\square$

Gegenkreis

Wir sehen, dass alle ersten Gegenpunkte der Ellipse auf dem Kreis mit Mittelpunkt F_1 und Radius $2a$ liegen. Wir bezeichnen diesen Kreis als **ersten Gegenkreis** der Ellipse.

Analog definieren wir auch den zweiten Gegenpunkt G_2 von P als das Ergebnis der Spiegelung von F_1 an der Tangente in P und den zweiten Gegenkreis der Ellipse als Kreis mit Mittelpunkt F_2 und Radius $2a$. Alle Überlegungen, die wir für den ersten Gegenpunkt anstellen gelten natürlich vollkommen analog für den zweiten Gegenpunkt.

Beide Gegenkreise sind in nebenstehender Figur abgebildet.

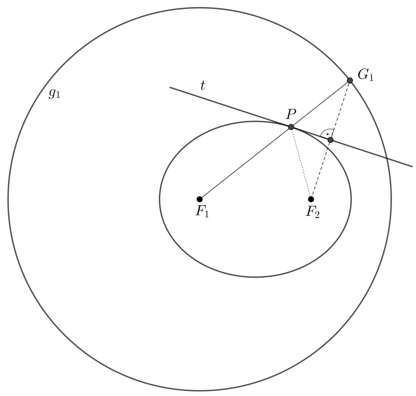


Konstruktion 2 (Ellipsenkonstruktion mittels Gegenkreises)**.** Es seien die beiden Brennpunkte F_1 und F_2, sowie die Hauptachsenlänge $2a$ einer Ellipse gegeben. Konstruiere die Ellipse punktweise mittels eines Gegenkreises.

Lösung. Mit Hilfe des Gegenkreises erhalten wir eine weitere Möglichkeit, die Ellipse punktweise (und tangentenweise) zu konstruieren.

1) Wir zeichnen den ersten Gegenkreis g_1 der Ellipse, also den Kreis mit Mittelpunkt F_1 und Radius $2a$.

2) Wählen wir nun einen beliebigen Punkt G_1 auf g_1, so ist der Schnittpunkt des Radius F_1G_1 des Gegenkreises mit der Streckensymmetrale t von F_2G_1 sicher ein Punkt der Ellipse, und die Gerade t die Tangente in P.



Um dies einzusehen, können wir das Argument von oben in umgekehrter Reihenfolge verwenden.

Da P auf der Streckensymmetrale von F_2G_1 liegt, gilt $PF_2 = PG_1$. Daraus folgt aber auch

$$PF_1 + PF_2 = PF_1 + PG_1 = F_1F_2 = 2a,$$

womit P sicher ein Punkt der Ellipse mit den Brennpunkten F_1 und F_2 und der Hauptachsenlänge $2a$ ist. Die Tatsache, dass t die Ellipsentangente in diesem Punkt P ist, folgt wieder aus der Überlegung, die in der Figur zu Konstruktion 1 dargestellt ist. □