Grundlagenblatt – Gemeinsame Eigenschaften der Kegelschnitte

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit einigen gemeinsamen Eigenschaften aller drei Kegelschnittsarten auseinandersetzen und diese anschließend für ein paar exemplarische Konstruktionen verwenden. Dieser Themenbereich ist sehr weitreichend und die Konstruktionen am GB – Ellipse durch fünf Punkte und GB – Parabel durch vier Tangenten sollen nur einen ersten Einblick in die Möglichkeiten dieser Thematik bieten. Es wird sich auch herausstellen, dass wir zur Begründung dieser Konstruktionen etwas komplexere Elementarergebnisse verwenden werden müssen. Es ist also hilfreich, wenn man sich mit den entsprechenden Ergebnissen im Vorfeld schon etwas tiefer auseinandergesetzt hat.

5-Punkte Lemma

Es seien fünf Punkte in der Ebene gegeben, von denen keine drei auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Dann gibt es eine eindeutige Kurve zweiten Grades, die durch alle fünf Punkte geht.

Die folgenden Überlegungen stellen keinen vollständigen Beweis dar, bieten aber genügend Information, um die Behauptung ausreichend plausibel zu machen. Diese Gedankengänge können auch durch Ergänzung aller auftretenden Sonderfälle zu einem vollständigen Beweis erweitert werden.

Beweis. Eine allgemeine Kurve zweiten Grades hat eine Gleichung der Gestalt

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Dabei sind A, B, C, D, E und F reelle Zahlen, wobei A, B und C nicht alle gleichzeitig gleich Null sein können, da die Gleichung in diesem Fall linear wäre und nicht quadratisch.

Setzt man der Reihe nach die Koordinaten der fünf gegebenen Punkte in dieser Gleichung für x bzw. y ein, erhält man ein lineares Gleichungssystem mit fünf Gleichungen und sechs Variablen. Dieses Gleichungssystem ist homogen, aber dividieren wir die Gleichung durch eine Variable (z.B. F), und ersetzen die Quotienten der Variablen durch neue Variable (also A/F durch eine neue Variable A', usw.), erhalten wir ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit fünf Gleichungen in fünf Variablen. Im Allgemeinen hat ein solches Gleichungssystem eine eindeutige Lösung. Wir erhalten also im allgemeinen Fall eindeutige Werte, die wir als Koeffizienten in der Gleichung

$$A'x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + 1 = 0$$

einsetzen können, und dies ist eine mögliche Gleichung einer Kurve zweiten Grades, wobei wir gleich bemerken, dass jedes Vielfache dieser Gleichung eine Gleichung derselben Kurve ist. □

Wollen wir einen vollständigen Beweis konstruieren, müssen wir uns natürlich überlegen, was wir uns genau unter der Bemerkung „im Allgemeinen“ vorzustellen haben, und vor allem was geschehen wird, wenn dieser allgemeine Fall nicht eintritt. Für den Zweck der hier betrachteten Konstruktionen genügt es uns aber

Datum: 17. November 2022.

festzustellen, dass dieser allgemeine Fall unter den gegebenen Umständen, also bei Punkten, von denen keine drei auf einer gemeinsamen Geraden liegen, sicher vorliegt.

Wir erkennen jedenfalls, dass es im Regelfall durch fünf beliebig vorgegebene Punkte eine eindeutige Kurve zweiten Grades geht, also entweder eine Ellipse, eine Parabel oder ein Hyperbel.

Analog gilt auch folgendes duales Ergebnis.

5-Tangenten Lemma

Es seien fünf Geraden in der Ebene gegeben, von denen keine drei durch einen gemeinsamen Punkt gehen. Dann gibt es eine eindeutige Kurve zweiten Grades, die alle fünf Geraden berührt.

Wir verzichten auf einen Beweis dieser Behauptung, bemerken aber, dass dieses Ergebnis unmittelbar aus der „Dualität“ von Punktkegelschnitten und Geradenkegelschnitten (d.h. den Mengen aller Punkte eines Kegelschnitts und der Menge aller Tangenten eines Kegelschnitts) gefolgert werden kann. Eine logisch vollständige Betrachtung des Dualitätsprinzips würde den Rahmen dieser Überlegungen allerdings bei weitem sprengen.

Wenn wir diese beiden Hilfssätze kennen, möchten wir natürlich auch wissen, ob es konstruktive Möglichkeiten gibt, Achsen, Scheitel und Brennpunkte eines Kegelschnitts zu konstruieren, wenn wir entweder fünf Punkte oder fünf Tangenten des Kegelschnitts vorgeben. Unter allen möglichen gegenseitigen Lagen, die sich bei derartigen Fragen ergeben können, werden wir am GB – Ellipse durch fünf Punkte sehen, wie man eine Ellipse aus fünf vorgegebenen Punkten konstruieren kann (also Achsen und Scheitel der Ellipse bestimmen). Am GB – Parabel durch vier Tangenten werden wir den besonderen Fall der Vorgabe von fünf Tangenten vornehmen, bei dem eine Tangente die Ferngerade ist, also der resultierende Kegelschnitt eine Parabel ist.

Es gibt natürlich auch Lagen, bei denen sich jeweils die übrigen Kegelschnittsarten ergeben, und die Konstruktionen, die in diesen Fällen zu Ergebnis führen, sind zunächst dieselben. Allerdings gibt es auch noch einige Hilfssätze, die in diesen Fällen benötigt werden, zum Beispiel zur Konstruktion der Asymptoten einer Hyperbel, die durch fünf gegebene Punkte geht. Setzt man sich noch weiter mit dieser Materie auseinander, stellt man fest, dass man auch Kegelschnitte konstruktiv erfassen kann, für die man Kombinationen von Punkte und Tangenten gegeben hat. Dabei ergeben sich je nach Lage entweder eine eindeutige Lösung, mehrere Lösungen oder gar keine. Dabei sind Situationen von besonderem Interesse, wo eine Tangente mit Berührpunkt gegeben ist (also ein *Linienelement* des Kegelschnitts). Es stellt sich heraus, dass die Vorgabe eines Linienelements vom Standpunkt der Vollständigkeit der Angabe sowohl als Angabe von zwei Punkten als auch als Angabe von zwei Tangenten konstruktiv aufgefasst werden kann.

Ehe wir uns den konkreten Konstruktionen zuwenden, benötigen wir noch den folgenden wichtigen Hilfssatz.

Poldreieck Lemma

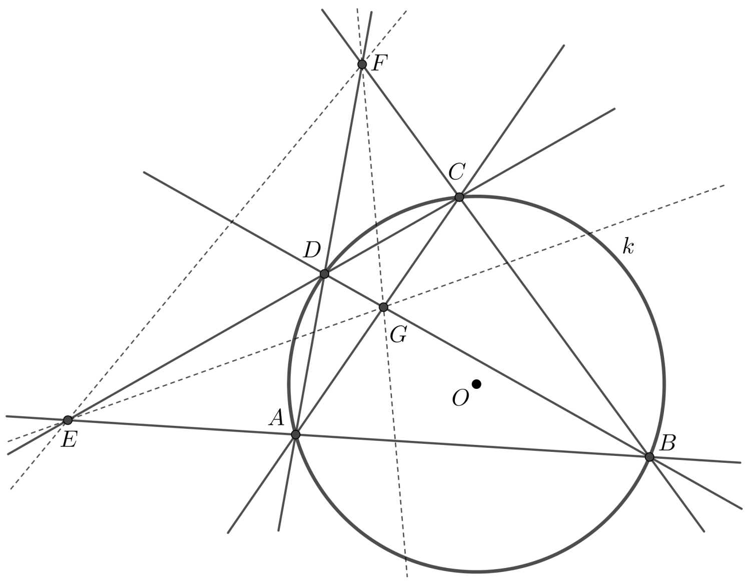
Es seien vier Punkte eines Kegelschnitts gegeben. Das Diagonalendreieck des vollständigen Vierecks, das durch diese vier Punkte bestimmt ist, ist dann ein Poldreieck des Kegelschnitts. Dasselbe gilt auch für das Diagonalendreiseit des vollständigen Vierseits, das von vier Tangenten des Kegelschnitts bestimmt ist.

Die folgenden Überlegungen stellen, wie schon beim 5-Punkte Lemma, wieder keinen vollständigen Beweis dar. Wie dort bieten sie aber genügend Information, um die Behauptung ausreichend plausibel zu machen und die hier präsentierten Gedankengänge können wieder durch Ergänzung aller auftretenden Sonderfälle zu einem vollständigen Beweis erweitert werden.

Im Rahmen dieser Argumente werden wir einige Ergebnisse verwenden, die den Rahmen des ganz Elementaren etwas erweitern. So werden wir Wissen über kollineare und affine Transformationen eines Kegelschnitts zu einem Kreis benötigen, Poldreiecke eines Kreises, sowie die Sätze von Ceva und Menelaos.

Beweis. Zuerst bemerken wir, dass jeder Kegelschnitt durch eine perspektive Kollineation auf einen Kreis abgebildet werden kann. In den Abschnitten zu den Krümmungskreiskonstruktionen haben wir, zum Beispiel, schon wiederholt die Tatsache angewendet, dass es perspektive Kollineationen gibt, die jeweils Kegelschnitte auf ihre Scheitelkrümmungskreise abbilden. Da Tangenten der Kegelschnitte dabei auf Tangenten der Bildkreise abgebildet werden, werden dabei auch Pol und Polare des Kegelschnitts auf Pol und Polare des Bildkreises abgebildet, also auch Poldreiecke der Kegelschnitte auf Poldreiecke der Bildkreise. Da derartige Abbildungen auch umkehrbar sind, genügt es, das Lemma für Kreise zu beweisen, da die Gültigkeit für alle Kegelschnittsarten aus derartigen perspektiven Abbildungen dann unmittelbar folgt.

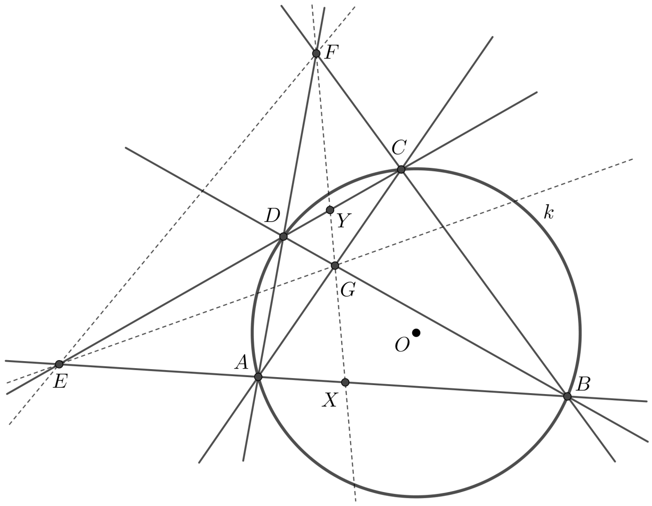
In folgender Figur sehen wir die Situation des Lemmas dargestellt.



Die Punkte A, B, C und D liegen auf dem Kreis k mit Mittelpunkt O. Die sechs Verbindungsgeraden von jeweils zwei dieser Punkte bilden ein vollständiges Viereck, dessen Seiten alle eingezeichnet sind. Die Punkte

$E = AB \cap CD$, $F = BC \cap DA$ und $G = AC \cap BD$ sind als Schnittpunkte jeweils gegenüberliegender Seiten dieses Vierecks die Eckpunkte des Diagonalendreiecks. Die Seiten dieses Diagonalendreiecks sind strichliert dargestellt. Die Punkte E, F und G sind hier alle als eigentliche Punkte angenommen. Um den Beweis vollständig zu führen, müssen wir auch die Fälle betrachten, in denen ein oder zwei dieser Punkte in Fernpunkten liegen (also wo $ABCD$ ein Trapez bzw. ein Rechteck ist; alle drei Punkte können nicht gleichzeitig Fernpunkte sein). Diese Fälle kann man aber mit etwas vereinfachten analogen Überlegungen zu den hier ausgeführten in den Griff bekommen. Im Weiteren werden wir also annehmen, dass die Eckpunkte von EFG eigentliche Punkte sind.

In der Figur sehen wir also noch einmal diese gleiche Konfiguration, aber hier haben wir auch die Schnittpunkte von FG mit AB bzw. CD ergänzt. Wir bezeichnen $X = AB \cap FG$ und $Y = CD \cap FG$.



Nun können wir etwas Besonderes über die Teilverhältnisse aussagen, in denen diese Punkte die Vierecksseiten teilen, das sich als sehr nützlich erweisen wird.

Zu diesem Zweck betrachten wir den Punkt X relativ zum Dreieck ABF. Da sich die Geraden AC, BD und FX in G schneiden, folgt aus den Satz von Ceva

$$\frac{XA}{XB} \cdot \frac{CB}{CF} \cdot \frac{DF}{DA} = 1.$$

Da ferner die Punkte E, D und C auf den Dreiecksseiten AB, AF bzw. BF kollinear liegen, folgt aus dem Satz von Menelaos

$$\frac{EA}{EB} \cdot \frac{CB}{CF} \cdot \frac{DF}{DA} = -1,$$

wobei die Streckenlängen, wie üblich, relativ orientiert interpretiert werden.

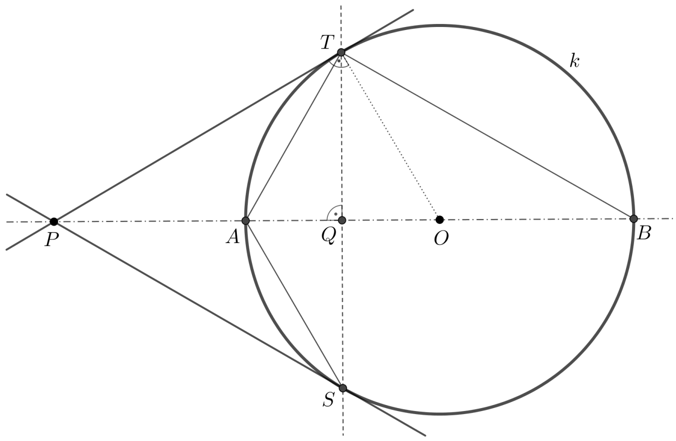
Wir sehen also, dass

$$\frac{XA}{XB} = -\frac{EA}{EB}$$

gilt, also dass die Punkte E und X die Strecke AB dem Betrag nach im gleichen Teilverhältnis teilen, wobei E die Strecke von außen teilt und X von innen.

Das analoge Ergebnis können wir auf gleiche Art natürlich für den Punkt Y auf der Strecke CD ableiten. Wenn wir also zeigen können, dass die Polare von E ebenfalls die Vierecksseiten in diesen Punkten schneidet, wissen wir, dass FG die Polare von E bezüglich k ist.

Um nun dies nachzuweisen, betrachten wir zuerst die Situation, die in dieser Figur abgebildet ist. Ein Punkt P liegt hier außerhalb eines Kreises k mit Mittelpunkt O, und wir sehen die beiden Tangenten von k, die durch P gehen und k in T bzw. S berühren. Der Durchmesser OP von k schneidet k in den Punkten A und B. Die Gerade ST ist die Polare von P bezüglich k, und diese schneidet den Durchmesser OP normal in Q.



Nun betrachten wir die Strecken TA und TB relativ zum Dreieck PQT. Da PT eine Tangente von k ist und TA eine Sehne, ist $\angle PTA$ ein Sehnen-Tangentenwinkel in k, und somit gleich dem Peripheriewinkel $\angle TSA$. Da der Kreisdurchmesser PO eine Symmetrieachse des Dreiecks AST ist, gilt somit

$$\angle ATS = \angle TSA = \angle PTA,$$

und TA is daher die Innenwinkelsymmetrale in T im Dreieck PQT. Es ist bekannt, dass eine solche Winkelsymmetrale die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der Längen der anliegenden Seiten teilt, und es gilt daher (unter Berücksichtigung der relativen Orientierung)

$$\frac{AP}{AQ} = -\frac{TP}{TQ}.$$

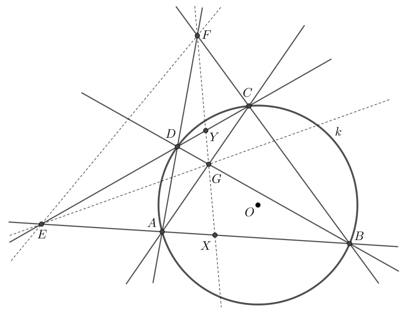
Nun ist aber AB ein Durchmesser von k und nach dem Satz von Thales steht TB daher normal zu TA. Somit ist aber TB die Außenwinkelsymmetrale in T im Dreieck PTQ, und es gilt auch für die Außenwinkelsymmetrale

$$\frac{BP}{BQ} = \frac{TP}{TQ}.$$

Wir erhalten also

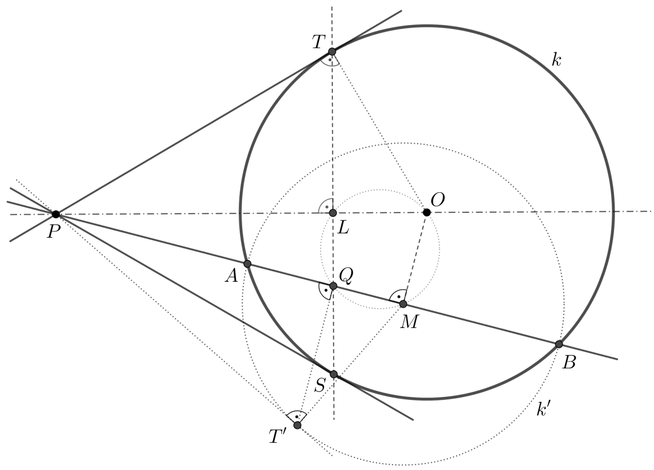
$$\frac{AP}{AQ} = -\frac{BP}{BQ} \iff \frac{PA}{PB} = -\frac{QA}{QB}.$$

Gilt also in dieser Konfiguration mit den Bezeichnungen von nebiger Figur $P = E$, so folgt auch tatsächlich auch $Q = X$, wie behauptet, wenn AB ein Durchmesser von k ist.



Nun bleibt noch zu zeigen, dass dies auch der Fall ist, wenn AB nicht ein Durchmesser von k ist, sondern eine allgemeine Sekante. Diese Situation ist in folgender Figur abgebildet.

Hier ist AB also eine allgemeine Sehne von k, wobei die Sekante AB wieder durch den Punkt P geht. Punkte O, S und T sind wie in der Figur davor definiert, wodurch ST auch hier die Polare von P bezüglich k ist. Wir definieren den Lotfußpunkt von P auf ST (also den Schnittpunkt von PO mit ST) als L und den Mittelpunkt von AB (der gleichzeitig der Lotfußpunkt von O auf AB ist) als M. In der Figur ist dazu ferner der Kreis k' mit Durchmesser AB (und Mittelpunkt M) eingezeichnet, eine Tangente PT' an k', und schließlich auch der Schnittpunkt Q von ST und AB.



Nun erhalten wir eine Folge von Beziehungen, die wir von ähnlichen Dreiecken in dieser Figur, sowie aus der Polarität an den Kreisen, ablesen können. Zunächst gilt aufgrund der Polarität von P bezüglich k sicher

$$PA \cdot PB = PT^2.$$

Die Dreiecke PLT und PTO sind rechtwinkelig mit einem gemeinsamen Winkel in P, und somit ähnlich. Daraus erhalten wir

$$\frac{PT}{PL} = \frac{PO}{PT} \iff PT^2 = PL \cdot PO.$$

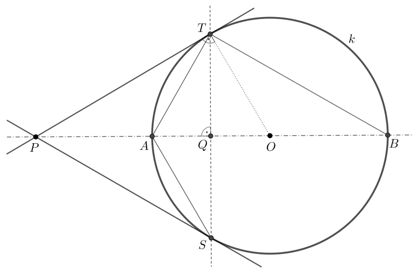
Nun beobachten wir, dass das Viereck $PLQM$ rechte Winkel in L und M hat, und somit ein Sehnenviereck ist. Aus der Polarität von P bezüglich des Umkreises von $PLQM$ folgt daher auch

$$PL \cdot PO = PQ \cdot PM,$$

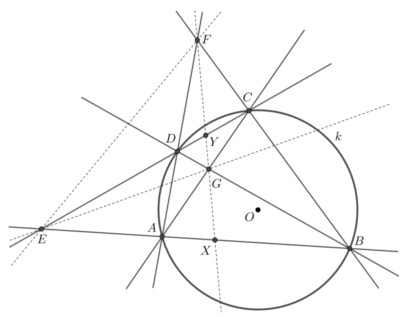
und zusammenfassend somit

$$PA \cdot PB = PQ \cdot PM.$$

Wie wir im ersten Teil des Beweises anhand der nebigen Figur bereits festgestellt haben, bedeutet dies, dass Q somit der Schnittpunkt der Polaren von P bezüglich des Kreises mit Durchmesser AB, also k', ist. In der Figur bedeutet dies, dass auch $PT'^2 = PA \cdot PB$ gilt.



Auch in diesem allgemeinen Fall entspricht also der Punkt Q dem Punkt X aus nebiger Figur, wenn wir $P = E$ annehmen, Da die ganze Überlegung für X völlig analog auch für Y gilt, sehen wir, dass die Diagonale FG des Vierecks $ABCD$ tatsächlich die Polare von E bezüglich k ist.



Auf ganz analoge Weise können wir natürlich das Argument für F und die Gerade GE führen. Wir sehen also, dass FG die Polare von E ist, und GE die Polare von F, womit auch ihr Schnittpunkt G der Pol der Verbindungsgeraden EF ist. Das Diagonalendreieck EFG ist somit tatsächlich, wie behauptet, ein Poldreieck vom Umkreis von $ABCD$. Der Beweis ist somit, zumindest für diesen Hauptfall, abgeschlossen. □