GRUNDLAGENBLATT – HARMONISCHE TEILUNG

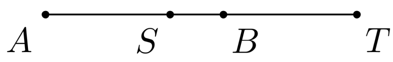
Fragen & Antworten auf diesem Grundlagenblatt

- ✓ Was ist eine **harmonische Teilung**?
- ✓ Wie konstruiert man den vierten harmonischen Punkt?
- ✓ Wie konstruiert man beide Teilungspunkte bei gegebenem Teilungsverhältnis?
- ✓ Warum führen beide Konstruktionen zum gewünschten Punkt?

Harmonische Teilung

Vier Punkte A, B, S und T liegen harmonisch, wenn S ein innerer Teilungspunkt der Strecke AB und T ein äußerer Teilungspunkt der Strecke AB ist mit

$$AS : SB = AT : BT \tag{1}$$

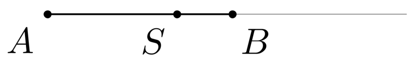


Harmonische Teilung

1) Erkläre, warum dann gleichzeitig der Punkt B bzw. der Punkt A auch innerer bzw. äußerer Teilungspunkt der Strecke ST ist.

2) Erkläre mit Gleichung (1), warum kein vierter harmonischer Punkt T existiert, wenn S der Mittelpunkt der Strecke AB ist.

Konstruktion 1. Gegeben sind die Strecke AB und der innere Teilungspunkt S, wobei S nicht der Mittelpunkt von AB ist.

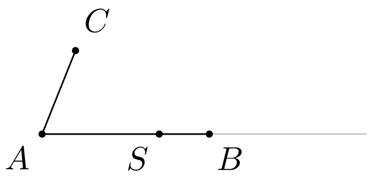


Bestimme den vierten harmonische Punkt T.

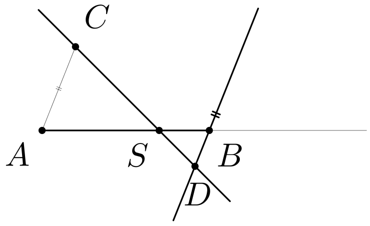
Lösung.

1) Wähle einen beliebigen Punkt C, der nicht auf der Geraden AB liegt und verbinde ihn mit A.

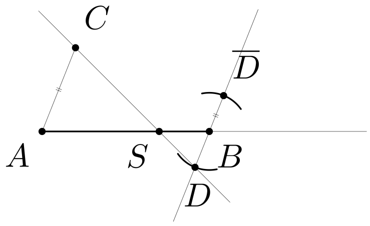
Datum: 17. November 2022.



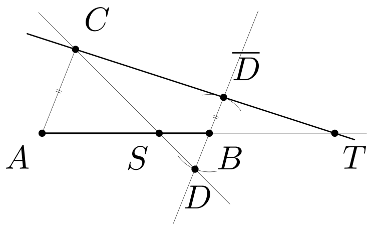
2) Der Punkt D sei der Schnittpunkt der Geraden CS mit der zu AC parallelen Geraden durch B.



3) Der Punkt $\overline{D}$ liege so auf der Geraden BD, dass die Strecken DB und $B\overline{D}$ gleich lang sind.



4) Der äußere Teilungspunkt T ist nun der Schnittpunkt der Geraden AB und $C\overline{D}$.



Da die Geraden AC und BD parallel sind, gilt nach Strahlensatz einerseits

$$\frac{AS}{SB} = \frac{AC}{BD}$$

und da AC und $B\overline{D}$ ebenfalls parallel sind, auch

$$\frac{AT}{BT} = \frac{AC}{B\overline{D}}$$

Da nach Konstruktion 1 $BD = B\overline{D}$, folgt unmittelbar, dass

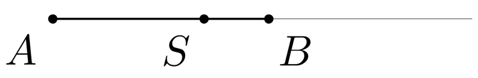
$$\frac{AT}{BT} = \frac{AS}{SB} \qquad \square$$

Ist der äußere Teilungspunkt gegeben, so erhält man den inneren Teilungspunkt, indem man die Konstruktion in umgekehrter Reihenfolge durchführt: Man wählt einen beliebigen, nicht auf der Gerade AB liegenden Punkt $\overline{D}$, bestimmt den Punkt D, der von B denselben Abstand hat wie $\overline{D}$. Den Schnittpunkt der Geraden $T\overline{D}$ mit der zu $B\overline{D}$ parallelen Gerade durch A nennen wir C. Der Schnittpunkt von AB mit CD ist der gesuchte innere Teilungspunkt S der Strecke AB.

Kennt man anstelle eines Teilungspunktes das Teilungsverhältnis $m : n$, so kann man zunächst einen der beiden Teilungspunkte mit einer der beiden zu Beginn des Abschnitts beschrieben Konstruktionsvorschrift bestimmen und danach die Konstruktion zur harmonischen Teilung anwenden, um den vierten Punkt zu erhalten.

Wir wollen zum Abschluss eine weitere euklidische Konstruktion des vierten harmonischen Punktes betrachten.

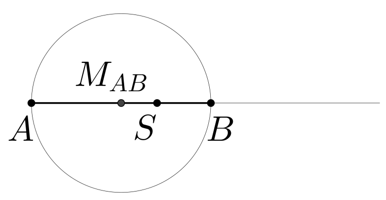
Konstruktion 2. Gegeben sind die Strecke AB und der innere Teilungspunkt S, wobei S nicht der Mittelpunkt von AB ist.



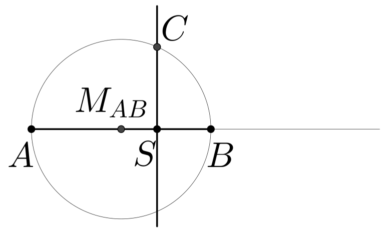
Bestimme den vierten harmonische Punkt T.

Lösung.

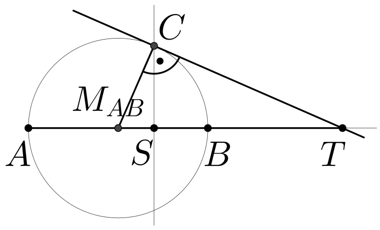
1) Wir errichten einen Kreis mit Durchmesser AB und Mittelpunkt M_{AB}.



2) Wir schneiden den Kreis mit der Normalen auf AB durch S. Einen dieser Punkte nennen wir C.



3) Wir konstruieren die Tangente an den Kreis durch C. (Die Tangente durch C steht normal auf den Radius $M_{AB}C$) Der Schnittpunkt der Tangente mit AB ist der gesuchte äußere Teilungspunkt T.



□

Wir können mithilfe ähnlicher Dreiecke nachweisen, dass der mit dieser Methode konstruierte Punkt T der vierte harmonische Punkt ist:

Wir wollen zeigen, dass

$$AS \cdot BT = SB \cdot AT \tag{2}$$

Die Dreiecke $M_{AB}SC$ und $M_{AB}CT$ sind ähnlich, da sie beide rechtwinkelig sind und den Winkel in M_{AB} gemeinsam haben.

Damit stimmen die Seitenverhältnisse der einander entsprechenden Seiten der Dreiecke überein:

$$\frac{M_{AB}C}{M_{AB}S} = \frac{M_{AB}T}{M_{AB}C}$$

Wir nennen den Radius des Kreises r und formen um[1]:

$$M_{AB}T \cdot M_{AB}S = (M_{AB}C)^2 = r^2$$

beziehungsweise

$$M_{AB}T = \frac{r^2}{M_{AB}S}$$

Wir rechnen unter Verwendung dieser Beziehung die beiden in Gleichung (2) auftretenden Terme $AS \cdot BT$ und $SB \cdot AT$ aus. Dabei gehen wir so vor, dass wir Strecken in Teilstrecken aufteilen. So gilt zum Beispiel, dass $AT = AM_{AB} + M_{AB}T$ und $AS = M_{AB}S + AM_{AB} = M_{AB}S + r$ sind:

$$\begin{aligned} AS \cdot BT &= (r + M_{AB}S) \cdot (M_{AB}T - r) = (r + M_{AB}S) \cdot \left(\frac{r^2}{M_{AB}S} - r\right) \\ &= \frac{r^3}{M_{AB}S} - r^2 + r^2 - r \cdot M_{AB}S = \frac{r^3}{M_{AB}S} - r \cdot M_{AB}S \end{aligned}$$

[1]Die folgende Beziehung folgt auch unmittelbar aus dem Kathetensatz für das Dreieck $M_{AB}CT$

$$\begin{aligned} SB \cdot AT &= (r - M_{AB}S) \cdot (r + M_{AB}T) = (r - M_{AB}S) \cdot \left(r + \frac{r^2}{M_{AB}S}\right) \\ &= r^2 + \frac{r^3}{M_{AB}S} - r \cdot M_{AB}S - r^2 = \frac{r^3}{M_{AB}S} - r \cdot M_{AB}S \end{aligned}$$

Die beiden Terme $AS \cdot BT$ und $SB \cdot AT$ stimmen also überein, somit ist T der äußere Teilungspunkt der Strecke AB.

Ist der äußere Teilungspunkt gegeben, so ist der innere Teilungspunkt S bestimmbar, indem man die Tangente (und somit den Schnittpunkt C) von Punkt T aus an den Kreis mit Mittelpunkt M_{AB} und Durchmesser AB konstruiert. Dafür benötigst du Inhalte vom KB – Gemeinsame Tangenten zweier Kreise.
Der Schnittpunkt der Normalen auf AB mit der Geraden AB ist dann der innere Teilungspunkt S.