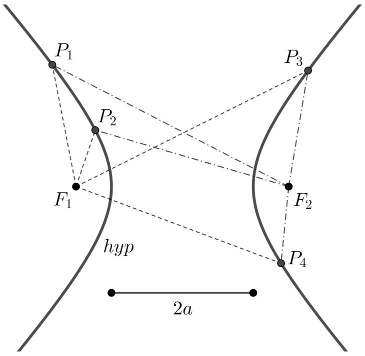
GRUNDLAGENBLATT – HYPERBELDEFINITION

Fragen & Antworten auf diesem Grundlagenblatt

- ✓ Was ist eine **Hyperbel**?
- ✓ Wie sind die Begriffe Brennpunkt und Hauptachsenlänge definiert?
- ✓ Wie konstruiert man einen Punkt auf einer Hyperbel?
- ✓ Wie sind die Begriffe Hauptachse, Nebenachse und Mittelpunkt definiert?
- ✓ Wie konstruiert man den Hauptscheitel einer Hyperbel?

Hyperbel

In der Euklidischen Ebene seien zwei Punkte F_1 und F_2, sowie eine Strecke der Länge $2a$ gegeben. Unter einer **Hyperbel** versteht man die Menge aller Punkte mit der Eigenschaft, dass die Differenz ihrer Abstände zu den beiden gegebenen Punkten F_1 und F_2 gleich $2a$ ist.



In obiger Figur sehen wir die Hyperbel p, die sich aus der Vorgabe der beiden abgebildeten Punkte F_1 und F_2 und der abgebildeten Streckenlänge $2a$ ergibt. Alle vier exemplarisch eingezeichnete Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 haben die Eigenschaft, dass die Differenz der Längen ihrer jeweils strichliert gezeichneten Verbindungsstrecke zu F_1 und ihrer jeweils strich-punktiert gezeichneten Verbindungsstrecke zu F_2 gleich $2a$ ist. (Dies kann man durch Messung auch leicht bestätigen.) Wir bemerken sofort die Analogie zur Ellipsendefinition, die sich nur dadurch unterscheidet, dass die Ellipsenpunkte eine konstante Abstandssumme zu den beiden Punkten F_1 und F_2 haben, während Hyperbelpunkte eine konstante Abstandsdifferenz haben. Es kann der Abstand eines Hyperbelpunkts zu F_1 größer als jener zu F_2 sein (wie es hier der Fall für P_3 und P_4 ist) oder umgekehrt (wie es hier der Fall für P_1 und P_2 ist). Die Reihenfolge von F_1 und F_2 geht also bei der Differenz nicht ein.

Datum: 17. November 2022.

Brennpunkt und Hauptachsenlänge

Die beiden Punkte F_1 und F_2 bezeichnet man, wie bei der Ellipse, als **Brennpunkte** der Kurve. Die Streckenlänge $2a$ wird, ebenfalls wie schon bei der Ellipsendefinition, als **Hauptachsenlänge** bezeichnet. Wie man sich anschaulich überlegen kann, muss $2a$ kleiner als die Länge der Strecke F_1F_2 sein, damit es tatsächlich Punkte mit dieser Eigenschaft gibt.

Im Fall der Ellipse ist dies umgekehrt; $2a$ muss offensichtlich länger als F_1F_2 sein, damit es Punkte gibt, deren Abstandssumme zu F_1 und F_2 gleich $2a$ sein kann.

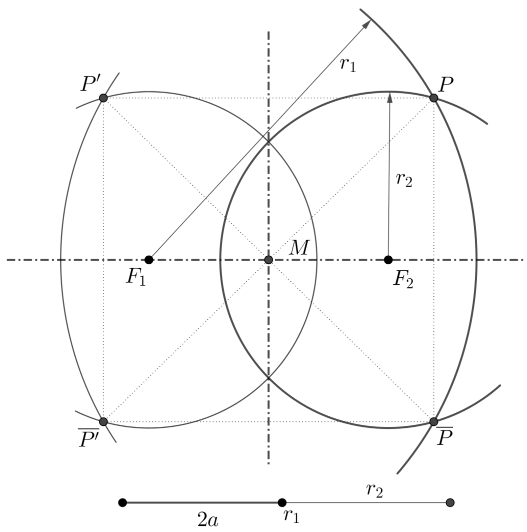
Hyperbel als Punktmenge und gleichzeitig als Kurve

Bei Vorgabe der Punkte F_1 und F_2 und der Streckenlänge $2a$ können wir die Menge der Hyperbelpunkte nun kurz als folgende Punktmenge in E^2 anschreiben:

$$\{P; |PF_1 - PF_2| = 2a\}$$

Den Absolutbetrag benötigen wir hier, weil der Abstand PF_2 der größere sein kann. Würden wir die Punktmenge ohne Verwendung des Absolutbetrags anschreiben, wären nur jene Hyperbelpunkte in der Menge inkludiert, deren Abstände zu F_1 größer sind als jene zu F_2. Die beiden resultierenden Teile der Kurve bezeichnen wir als die *Äste* der Hyperbel.
Wieder verbinden wir zwei grundlegend unterschiedliche Ideen miteinander. Einerseits sprechen wir von „einer Hyperbel", also einem einzigen Objekt, einer **Kurve**, während wir andererseits von der Hyperbel als Punktemenge sprechen, also der (unendlich vielen) Punkte mit dieser Eigenschaft.
Im Gegensatz zur Ellipse, ist die Hyperbel unbegrenzt. Die Abstände von Punkten P der Hyperbel zu F_1 bzw. zu F_2 können beliebig groß sein, und trotzdem die vorgeschriebene Differenz haben.

Eine euklidische Konstruktion von Hyperbelpunkten ergibt sich nun, ganz analog zu jener von Ellipsenpunkten aus GB – Ellipsendefinition, unmittelbar aus der Definition. Wieder erkennen wir in diesem Zusammenhang sofort, dass auch die Hyperbel zwei zueinander normale Symmetrieachsen besitzt. Dies ist in der Figur nebenan abgebildet.



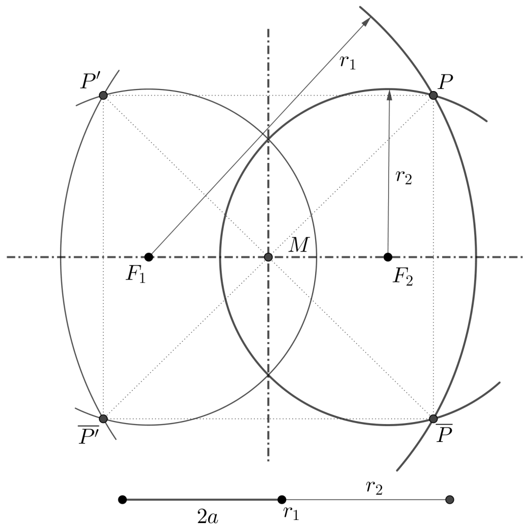
Konstruktion 1. Konstruiere Punkte P der Hyperbel. Es sind die beiden Brennpunkte F_1 und F_2, sowie die Hauptachsenlänge $2a$ gegeben.

Lösung. In folgender Figur sieht man eine derartige punktweise Konstruktion dargestellt.

1) Mann zeichne eine Strecke der Länge $2a$ ein.

2) Auf der gegebenen Strecke der Länge $2a$ markiert man einen Punkt, dessen Abstände zu den beiden Endpunkten der Strecke der Länge $2a$, r_1 bzw. r_2 sind.

3) Der Punkt P ist als Schnittpunkt des Kreises mit Mittelpunkt F_1 und Radius r_1 mit dem Kreis mit Mittelpunkt F_2 und Radius r_2 konstruiert.



Da der Abstand von P zu F_1 gleich r_1 ist, und der Abstand von P zu F_2 gleich r_2, ist die Differenz der Abstände von P zu den beiden Brennpunkten gleich $r_1 - r_2 = 2a$, womit P sicher ein Punkt der Hyperbel ist. □

Mit dieser Konstruktion ergibt sich aber auch der Punkt $\overline{P}$ als zweiter Schnittpunkt der beiden Konstruktionskreise. Da das Argument von P auf identische Art für $\overline{P}$ gilt, ist $\overline{P}$ auch ein Punkt der Hyperbel.Wie wir es schon von der punktweisen Ellipsenkonstruktion kennen, liegen die beiden Schnittpunkte zweier Kreise immer symmetrisch bezüglich der Verbindungsgeraden der beiden Kreismittelpunkte, womit die Punkte P und $\overline{P}$ symmetrisch bezüglich der Verbindungsgeraden von F_1 und F_2 liegen. Dies sind aber die Mittelpunkte aller derartigen Kreise, und wir sehen, dass es zu jedem Punkt P der Hyperbel einen weiteren, bezüglich F_1F_2 symmetrischen, Punkt $\overline{P}$ gibt.

Hauptachse

Die Gerade F_1F_2 durch die Brennpunkte der Hyperbel ist eine Symmetrieachse der Hyperbel.Wir bezeichnen diese Gerade als **Hauptachse** der Hyperbel.

Da auch der Abstand eines Hyperbelpunkts zu F_2 größer als jener zu F_1 sein kann, sind die Rollen der beiden Brennpunkte F_1 und F_2 in dieser Konstruktion austauschbar. In der Figur zu Konstruktion 1 wurde zur Konstruktion von P die längere Strecke r_1 als Radius des Konstruktionskreises mit Mittelpunkt F_1 verwendet, und die kürzere r_2 als Radius des Kreises mit Mittelpunkt F_2. Da dies auch umgekehrt durchgeführt werden kann, ergeben sich auch die beiden abgebildeten Hyperbelpunkte P' und $\overline{P'}$. Deren Konstruktionskreise sind symmetrisch zu denen von P und $\overline{P}$ bezüglich der Streckensymmetrale von F_1F_2. Die Punkte P' und $\overline{P'}$ liegen daher symmetrisch zu P bzw. $\overline{P}$ bezügich dieser Geraden. Da dies für alle auf diese Weise konstruierten Punkte der Hyperbel gilt, ist die Streckensymmetrale von F_1F_2 ebenfalls eine Symmetrieachse der Kurve.

Nebenachse MmF

Die Punkt F_1 und F_2 seien die Brennpunkte einer Hyperbel. Dann wird die Streckensymmetrale von F_1F_2 als **Nebenachse** der Hypebel bezeichnet.

Die beiden Symmetriachsen sind als Verbindungsgerade von F_1 und F_2 bzw. Streckensymmetrale von F_1F_2 wie bei der Ellipse zueinander normal.

Da die Kurve zwei zueinander normale Symmetrieachsen besitzt, ist der Schnittpunkt der beiden Achsen das Symmetriezentrum der Kurve, dies ist in der Figur zu Konstruktion 1 als M beschriftet. Natürlich folgt die Punktsymmetrie der Kurve mit diesem Symmetriezentrum auch wieder unmittelbar aus der Symmetrie der Konstruktionskreise von P und $\overline{P}$ bzw. P' und $\overline{P'}$ bezüglich M.

Mittelpunkt MmF

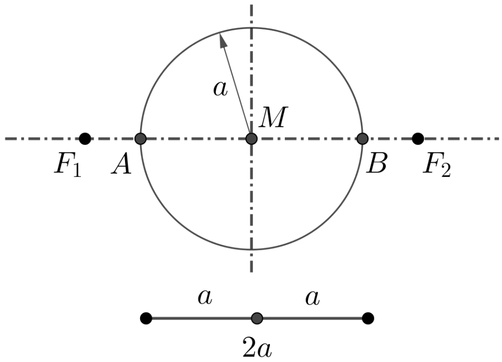
Die Punkt F_1 und F_2 seien die Brennpunkte einer Hyperbel. Dann wird der Mittelpunkt von F_1F_2 als **Mittelpunkt** der Hyperbel bezeichnet.

Die drei Symmetrien sind in der Figur zu Konstruktion 1 durch das Rechteck $PP'\overline{P'}\overline{P}$ und seine beiden Diagonalen angedeutet.

Nun stellt sich die Frage, ob es Hyperbelpunkte gibt, die auf den Symmetrieachsen liegen (sogenannte **Scheitel** der Hyperbel), und wenn ja, wie man diese konstruktiv bestimmen kann.

Konstruktion 2 (Scheitel der Hyperbel)**.** Gegeben sei eine Hyperbel mit Brennpunkten F_1 und F_2 und Hauptachsenlänge $2a$. Konstruiere Punkte, die sowohl auf der Hyperbel als auch auf der Hauptachse liegen.

Lösung. Punkte, die sowohl auf der Hyperbel als auch auf deren Nebenachse liegen gibt es offensichtlich nicht. Alle Punkte der Streckensymmetrale haben ja den gleichen Abstand zu F_1 und zu F_2, womit die Differenz dieser Abstände immer 0 ist, und somit sicher nicht $2a$. Wie bei der Ellipse, ist es aber überraschend einfach, die Punkte der Hyperbel zu konstruieren, die auf der Hauptachse F_1F_2 liegen. Zu diesem Zweck müssen wir nur, die beiden Punkte der Hauptachse konstruieren, die zum Mittelpunkt M den Abstand a haben.



1) Wir schneiden also den Kreis mit Radius a und Mittelpunkt M mit der Geraden F_1F_2. Auf diese Weise erhalten wir zwei Punkte A und B. Warum liegen aber diese Punkte auf der Hyperbel?

Um dies zu zeigen, müssen wir nachweisen, dass sie der Hyperbeldefinition genügen. Mit anderen Worten, wir müssen zeigen, dass die Differenz ihrer Abstände zu den beiden Brennpunkten jeweils gleich $2a = AB$ ist. Für den Punkt A, zum Beispiel, muss also nachgewiesen werden, dass $AF_2 - AF_1 = 2a$ gilt.

Dies folgt aber unmittelbar aus der Tatsache, dass M einerseits als Schnittpunkt der Streckensymmetrale von F_1F_2 mit F_1F_2 der Mittelpunkt der Strecke F_1F_2 ist, und andereseits als Mittelpunkt des Kreises mit Durchmesser AB auch der Mittelpunkt von AB. Dies hat zur Folge, dass die beiden Strecken F_1A und F_2B symmetrisch liegen bezüglich M, und daher gleiche Länge haben. Wir erhalten also für den Punkt A:

$$\begin{aligned} AF_2 - AF_1 &= AF_2 + BF_2 \\ &= AB \\ &= 2a. \end{aligned}$$

Der Punkt A genügt also tatsächlich der Hyperbeldefinition, und ist somit ein Punkt der Kurve. Dieses Argument gilt aus Symmetriegründen auf vollkommen analoge Art auch für den Punkt B. Die beiden Punkte A und B werden als Kurvenscheitel, die auf der Hauptachse liegen, als **Hauptscheitel** der Hyperbel bezeichnet.

Wir bemerken, dass die Kurve keine Nebenscheitel hat, da sie keine Punkte auf ihrer Nebenachse besitzt. □

Darstellung der Hyperbel

Zusammenfassend sehen wir also die Kurve mit ihren beiden Symmetrieachsen, beiden Scheiteln, den beiden Brennpunkten und dem Mittelpunkt. Die Strecke AB hat die Länge $2a$.