GRUNDLAGENBLATT – HYPERBELGLEICHUNG

Fragen & Antworten auf diesem Grundlagenblatt

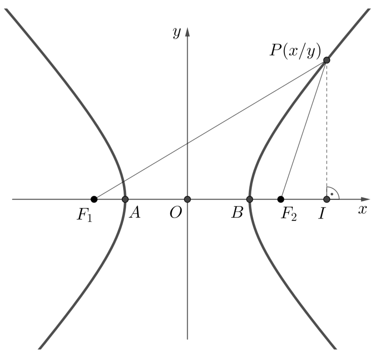
✓ Was bedeuten Exzentrizität und Nebenachsenlänge einer Hyperbel?
✓ Wie sind Hyperbeln in erster und zweiter Hauptlage charakterisiert?
✓ Wie lautet die **Hyperbelgleichung** für Hyperbeln in erster bzw. in zweiter Hauptlage?
✓ Wie sind die Asymptoten der Hyperbel charakterisiert?

Wie wir vom GB – Hyperbeldefinition wissen, ist die Hyperbel als Punktmenge

$$\{P; |PF_1 - PF_2| = 2a\}$$

definiert, wobei F_1 und F_2 die Brennpunkte der Hyperbel sind, und a die Hauptachsenlänge. Wir haben dort auch schon festgestellt, dass die Verbindungsgerade F_1F_2 und die Streckensymmetrale von F_1F_2 Symmetrieachsen der Hyperbel sind. Die Hyperbelpunkte A und B auf der Hauptachse F_1F_2 haben wir als die Hauptscheitel der Hyperbel bezeichnet, und die Streckensymmetrale von F_1F_2 haben wir als Nebenachse der Hyperbel bezeichnet.

In nebenstehender Figur haben wir die beiden Punkte F_1 und F_2 in ein Koordinatensystem eingebettet, wobei wir die Koordinaten $F_1(-e/0)$ und $F_2(e/0)$ annehmen. (Die Zahl $e > 0$ bezeichnen wir als *Exzentrizität* der Hyperbel.) Dadurch liegen die Punkte A, B, F_1 und F_2 alle auf der x-Achse.



Der Mittelpunkt der Hyperbel ist auch der Mittelpunkt der Strecke F_1F_2 und liegt daher im Koordinatenursprung. Da die Abstände der Hauptscheitel vom Mittelpunkt gleich a sind, erhalten wir die Koordinaten $A(-a/0)$ und $B(a/0)$ für die Hauptscheitel.

Nebenachsenlänge

Analog zur Vorgangsweise bei der Ellipse, wird es sich auch als nützlich erweisen, eine Größe b zu definieren, die wir als **Nebenachsenlänge** der Hyperbel bezeichnen.

Datum: 17. November 2022.

Charakterisierung „erste Hauptlage“

Die Nebenachsenlänge b wird durch die Beziehung

$$b^2 = e^2 - a^2$$

definieren.
Diese Lage der Hyperbel relativ zu den Koordinatenachsen bezeichnen wir als **erste Hauptlage** der Hyperbel

Nun nehmen wir an, ein allgemeiner Punkt P der Hyperbel sei eingezeichnet, wobei seine Koordinaten mit $P(x/y)$ als variabel angenommen werden.

In obiger Zeichnung haben wir $0 < e < x$ und $0 < y$ angenommen, aber die folgenden Überlegungen gelten mit kleinen Vorzeichenänderungen für alle möglichen Lagen von P.

Der Hilfspunkt I sei der Punkt auf der x-Achse mit den Koordinaten $I(x/0)$.

Die Dreiecke F_1IP und F_2IP sind dann rechtwinkelig, und ihre Kathetenlängen kennen wir mit

$$F_1I = e + x, \quad IP = y \quad \text{und} \quad F_2I = x - e.$$

Nun wissen wir, dass P genau dann ein Punkt der Hyperbel ist, wenn

$$|F_1P - F_2P| = 2a$$

gilt. Dies ist gleichwertig mit

$$\left|\sqrt{F_1I^2 + IP^2} - \sqrt{F_2I^2 + IP^2}\right| = 2a.$$

In dieser Lage gilt $F_1P > F_2P$ (ist der Abstand von P zu F_2 der größere, verläuft die Rechnung vollkommen analog), und dies ist somit gleichwertig mit

$$\begin{aligned} &\sqrt{(e+x)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a \\ \iff &\sqrt{(e+x)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Da der Term $2a + \sqrt{(e-x)^2 + y^2} > 0$ ist, ist das Quadrieren dieser Gleichung eine Äquivalenzumformung.

Also ist diese Gleichung gleichwertig mit

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow (e+x)^2+y^2 = 4a^2+4a\sqrt{(x-e)^2+y^2}+(x-e)^2+y^2\\
&\Longleftrightarrow e^2+2ex+x^2+y^2 = 4a^2+4a\sqrt{(x-e)^2+y^2}+x^2-2ex+e^2+y^2\\
&\Longleftrightarrow 4a\sqrt{(x-e)^2+y^2} = 4ex-4a^2\\
&\Longleftrightarrow a\sqrt{(x-e)^2+y^2} = ex-a^2
\end{aligned}$$

Abermals erhalten wir durch Quadrieren die gleichwertige Gleichung

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow a^2((x-e)^2+y^2) = e^2x^2-2a^2ex+a^4\\
&\Longleftrightarrow a^2(x^2-2ex+e^2+y^2) = e^2x^2-2a^2ex+a^4\\
&\Longleftrightarrow a^2x^2-2a^2ex+a^2e^2+a^2y^2 = e^2x^2-2a^2ex+a^4\\
&\Longleftrightarrow (e^2-a^2)x^2-a^2y^2 = a^2e^2-a^4 = a^2(e^2-a^2)
\end{aligned}$$

Wir nutzen nun in der Gleichung $(e^2-a^2)x^2-a^2y^2 = a^2(e^2-a^2)$, dass für eine Hyperbel in erster Hauptlage der Zusammenhang $b^2 = e^2-a^2$ gilt.

Wir erhalten somit die zur Ausgangsgleichung $|F_1P - F_2P| = 2a$ äquivalente Gleichung

$$b^2x^2-a^2y^2 = a^2b^2.$$

Gleichung der Hyperbel in erster Hauptlage

Wir erkennen also, dass ein Punkt mit den Koordinaten $P(x/y)$ genau dann auf der Hyperbel in erster Hauptlage mit Achsenlängen a und b liegt, wenn

$$b^2x^2-a^2y^2 = a^2b^2$$

gilt. Dividiert man diese Gleichung durch den Faktor a^2b^2, erkennt man, dass dies gleichwertig mit der Gültigkeit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1$$

ist. Den Ausdruck

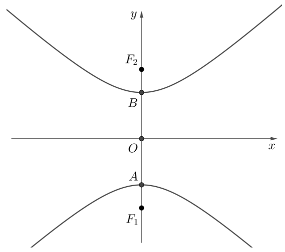
$$b^2x^2-a^2y^2 = a^2b^2 \iff \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1$$

bezeichnet man als **Gleichung der Hyperbel** in erster Hauptlage.

Es ist bemerkenswert, dass diese Gleichung dieselbe Struktur wie die Gleichung der Ellipse in erster Hauptlage aufweist, wobei nur die Addition durch eine Subtraktion ersetzt wird.

Charakterisierung „zweite Hauptlage“

Vertauschen wir die Rollen der Koordinatenachsen und nehmen an, dass die Brennpunkte durch $F_1(0/-e)$ und $F_2(0/e)$ gegeben seien, erhalten wir die Situation, die in nebenstehender Figur abgebildet ist. Diese Lage der Hyperbel relativ zu den Koordinatenachsen bezeichnen wir als die **zweite Hauptlage**.



Da man die Ableitung der Hyperbelgleichung in diesem Fall vollkommen analog zu der für die erste Hauptlage, unter Vertauschung der Rollen von x und y, durchführen kann, erhalten wir in diesem Fall die Hyperbelgleichung

$$b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2 \iff \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Kehren wir kurz zur ersten Hauptlage zurück, sehen wir, dass ein kleine Änderung der Hyperbelgleichung ein interessantes Detail verrät. Ersetzen wir in der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die Zahl 1 durch 0, erhalten wir die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \iff \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0.$$

Dies ist die Gleichung des Geradenpaars mit den Gleichungen

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \iff y = \frac{b}{a} \cdot x \quad \text{und} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \iff y = -\frac{b}{a} \cdot x,$$

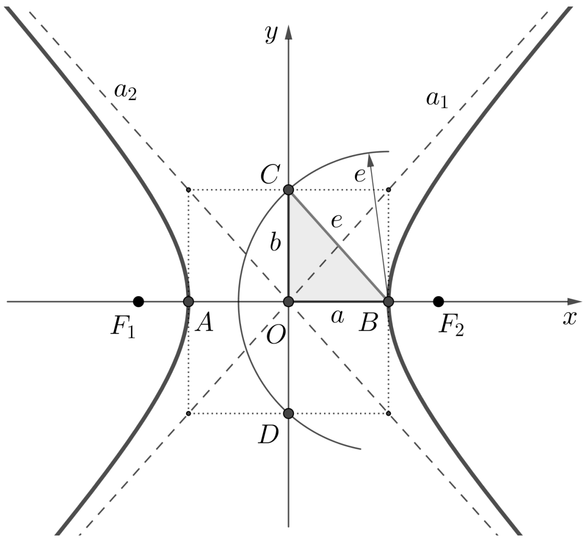
also der beiden Geraden durch den Ursprung mit den Steigungen $\pm\frac{b}{a}$.

Konstruktion 1 (Geradenpaar)**.** Es sei die Hyperbel in erster Hauptlage, mit beiden Brennpunkte F_1 und F_2, sowie der Hauptachsenlänge $2a$ gegeben. Konstruiere das Geradenpaar durch den Ursprung mit den Steigungen $\pm\frac{b}{a}$. Dieser beiden Geraden bezeichnen wir als a_1 bzw. a_2.

Lösung.

1) Zuerst wird der Kreis mit Radius e und Mittelpunkt in einem der beiden Hauptscheitel (in diesem Fall in B) mit der Nebenachse geschnitten. Die resultierenden Punkte C und D bezeichnet man, obwohl sie nicht Punkte der Hyperbel sind, als **Nebenscheitel** der Hyperbel. Der Grund dafür liegt in der Tatsache, dass ihr Abstand vom Hyperbelmittelpunkt O genau b beträgt. Dies folgt wiederum unmittelbar aus der Tatsache, dass die rechtwinkeligen Dreiecke OBC und OBD die Kathetenlänge $OB = a$ haben und die Hypotenusenlänge $BC = BD = e$. Der Abstand $OC = OD = b$ ergibt sich daher aus der Definition $b^2 = e^2 - a^2$ von b und dem pythagoreischen Lehrsatz.

2) Konstruieren wir anschließend das Rechteck (dessen Seiten hier punktiert gezeichnet sind) mit Seiten parallel zu den Achsen durch die vier Scheitel A, B, C und D. Die Diagonalen dieses Rechtecks gehen offensichtlich durch den Rechtecksmittelpunkt O und haben die Steigungen $\pm\frac{b}{a}$. Sie sind also genau die beiden gesuchten Geraden a_1 und a_2.

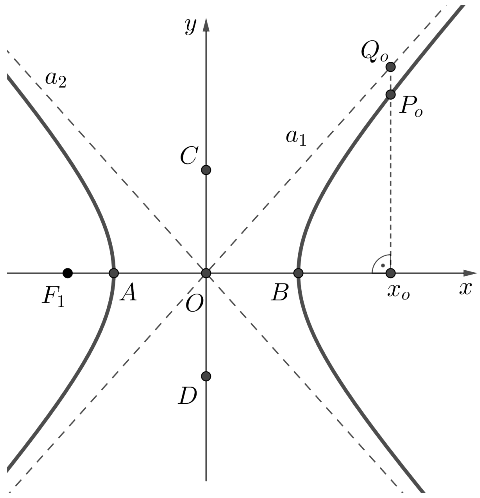


□

Charakterisierung der Asymtoten

Die Geraden a_1 und a_2, durch den Ursprung mit der Steigung $\pm\frac{b}{a}$, bezeichnet man als **Asymptoten** der Hyperbel. Die Kurve nähert sich auch tatsächlich für große Werte von $|x|$ asymptotisch diesen beiden Geraden.

Wir können dies exemplarisch leicht für positive x und y Werte nachweisen (wobei die Eigenschaft somit aus der Symmetrie auch in den anderen Quadranten gelten muss). Dies sehen wir in nebenstehender Figur angedeutet.



Hier ist x_o eine positive Zahl, die auf der x-Achse angedeutet ist. P_o ist der Punkt auf der Hyperbel mit der x-Koordinaten x_o und positiver y-Koordinate und Q_o ist der Punkt der Asymptote a_1 mit x-Koordinate x_o. Da die Gleichung von a_1 durch $y = \frac{b}{a} \cdot x$ gegeben ist, ist die y-Koordinate von Q_o gleich $\frac{b}{a} \cdot x_o$, und da P_o auf der Hyperbel liegt, ist die y-Koordinate von P_o gegeben durch

$$\frac{x_o^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (x_o^2 - 1) \iff y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x_o^2 - 1}.$$

Der Abstand zwischen den beiden Punkten Q_o und P_o ist also gleich

$$\begin{aligned}
\frac{b}{a} \cdot x_o - \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x_o^2 - 1} &= \frac{b}{a} \cdot \frac{x_o - \sqrt{x_o^2 - 1}}{1} \\
&= \frac{b}{a} \cdot \frac{x_o - \sqrt{x_o^2 - 1}}{x_o^2 - (x_o^2 - 1)} \\
&= \frac{b}{a} \cdot \frac{(x_o - \sqrt{x_o^2 - 1})}{(x_o - \sqrt{x_o^2 - 1})(x_o + \sqrt{x_o^2 - 1})} \\
&= \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{x_o + \sqrt{x_o^2 - 1}}
\end{aligned}$$

Wählen wir die Zahl x_o nun beliebig groß, so wandern die Punkte P_o und Q_o in dieser Figur beliebig weit nach rechts. da der Wert von x_o beliebig groß wird, ist dies auch für den Nenner des letztgenannten Bruchs der Fall, und der Abstand zwischen Q_o und P_o wird daher beliebig klein, wobei der Punkt P_o aber immer unter dem Punkt Q_o bleibt. Dies ist genau das Kennzeichnende an einer Kurvenasymptote, und die Gerade a_1 (und aus Symmetriegründen auch die Gerade a_2) ist somit tatsächlich eine Asymptote der Hyperbel.