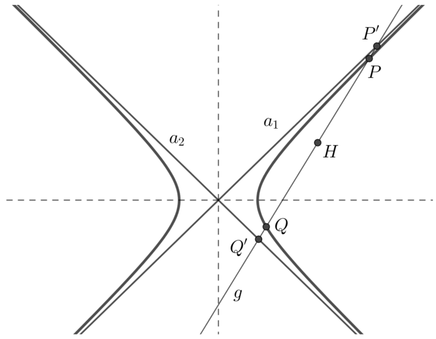
GRUNDLAGENBLATT – HYPERBELSEKANTEN

Fragen & Antworten auf diesem Grundlagenblatt

✓ Wie ist der Mittelpunkt der Schnittpunkte, einer Geraden mit einer Hyperbel und ihrer beiden Asymptoten, charakterisiert?
✓ Wie konstruiert man punktweise eine Hyperbel?

Einige sehr interessante Konstruktionen ergeben sich aus folgender Beobachtung.

Wir betrachten, wie in der Figur dargestellt, die Schnittpunkte einer Geraden g mit einer Hyperbel und ihren beiden Asymptoten. In dieser Figur sind a_1 und a_2 die Asymptoten der dargestellten Hyperbel. Die beiden Schnittpunkte der Geraden g mit der Hyperbel sind mit P und Q bezeichnet, und die Schnittpunkte von g mit den beiden Asymptoten mit P' bzw. Q'.



Wir werden nun zeigen, dass die beiden Strecken PQ und $P'Q'$ immer einen gemeinsamen Mittelpunkt H haben, unabhängig von der Lage von g relativ zur Hyperbel (sofern es natürlich überhaupt gemeinsame Punkte gibt).

Zu diesem Zweck sei die Gleichung der Hyperbel durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gegeben, und die Gleichung der Geraden g durch

$$g : px + qy = r.$$

Wir können oBdA voraussetzen, dass $q \neq 0$ gilt, da die Behauptung im Fall $q = 0$ offensichtlich aus Symmetriegründen gilt. (In diesem Fall ist g normal zur Hauptachse der Hyperbel, und da die Punkte P und Q bzw. P' und Q' dann jeweils symmetrisch liegen bezüglich der Hyperbelhauptachse, liegt dieser gemeinsame Mittelpunkt dann sicher auf der Hauptachse.) Die Gleichungen der Asymptoten

Datum: 17. November 2022.

sind dann durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

gegeben.

Wir erhalten also die Koordinaten der Punkte P und Q als Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 &\iff b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2\\ px+qy=r &\iff y=-\frac{p}{q}\cdot x+\frac{r}{q},\end{aligned}$$

und analog erhalten wir die Koordinaten der Punkte P' und Q' als Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 &\iff b^2x^2-a^2y^2=0\\ px+qy=r &\iff y=-\frac{p}{q}\cdot x+\frac{r}{q}.\end{aligned}$$

Schreiben wir der Einfachheit halber (wie üblich) für die Gerade $k=-\frac{p}{q}$ und $d=\frac{r}{q}$, erhalten wir nach Substitution für y als Gleichung für die x-Koordinaten von P und Q

$$\begin{aligned}&b^2x^2-a^2(k^2x^2+2dkx+d^2)=a^2b^2\\ \iff &(b^2-a^2k^2)x^2-2a^2dkx-(a^2d^2+a^2b^2)=0\\ \iff &x=\frac{a^2dk\pm\sqrt{(a^2dk)^2+(b^2-a^2k^2)(a^2d^2+a^2b^2)}}{b^2-a^2k^2},\end{aligned}$$

und die x-Koordinate des Mittelpunkts von PQ ist daher gleich $\frac{a^2dk}{b^2-a^2k^2}$.

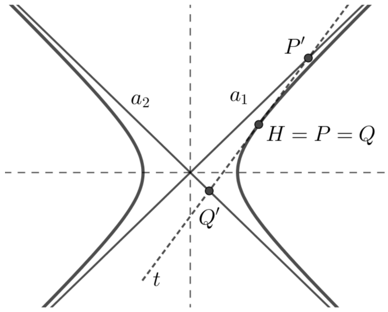
Auf gleiche Weise erhalten wir nach Substitution für y als Gleichung für die x-Koordinaten von P' und Q'

$$\begin{aligned}&b^2x^2-a^2(k^2x^2+2dkx+d^2)=0\\ \iff &(b^2-a^2k^2)x^2-2a^2dkx-a^2d^2=0\\ \iff &x=\frac{a^2dk\pm\sqrt{(a^2dk)^2+(b^2-a^2k^2)\cdot a^2d^2}}{b^2-a^2k^2},\end{aligned}$$

und die x-Koordinate des Mittelpunkts von $P'Q'$ ist daher ebenfalls gleich $\frac{a^2dk}{b^2-a^2k^2}$.

Da beide Punkte auf derselben Geraden liegen, sind sie somit identisch, und der Punkt H ist daher, sofern Punkte P, Q, P' und Q' alle existieren, der gemeinsame Mittelpunkt von PQ und $P'Q'$. Dies gilt auch, wenn die Diskriminante der quadratischen Gleichung für die Hyperbelschnittpunkte gleich 0 ist, die Gerade g also eine Tangente der Hyperbel ist.

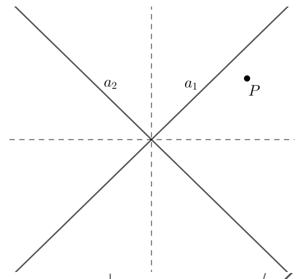
Wenn die Gerade g eine Tangente der Hyperbel ist gilt $P = Q = H$, und wir sehen, dass jede Tangente der Hyperbel die beiden Asymptoten a_1 und a_2 in Punkten P' und Q' schneidet, die bezüglich des Berührpunkts symmetrisch liegen. Dies ist in der Figur nebenan illustriert.



Es ist an dieser Stelle bemerkenswert festzustellen, dass es auch Situationen gibt, in denen die Gerade g nur einen Schnittpunkt mit den beiden Asymptoten erzeugt, nämlich wenn g entweder zu einer Asymptote parallel liegt oder durch den Hyperbelmittelpunkt geht. Diese Fälle können wir aber für unsere aktuellen Überlegungen einfach ausschließen.

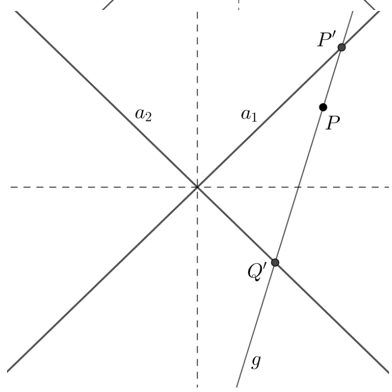
Nun gibt es einige sehr interessante Konstrutkionen von Hyperbelpunkten und -tangenten, die wir unmittelbar aus diesen Tatsachen ableiten können.

Konstruktion 1 (Hyperbel punktweise)**.**

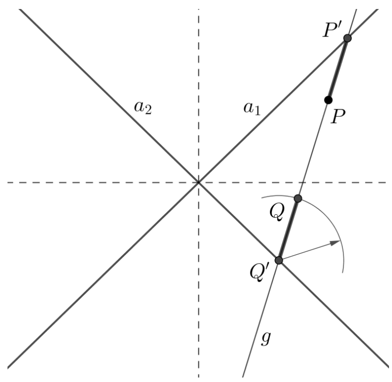


Gegeben sind die beiden Asymptoten a_1 und a_2 der Hyperbel zusammen mit einem einzigen Punkt P der Kurve. Konstruiere mit sehr einfachen Mitteln beliebig viele Punkte einer Hyperbel.

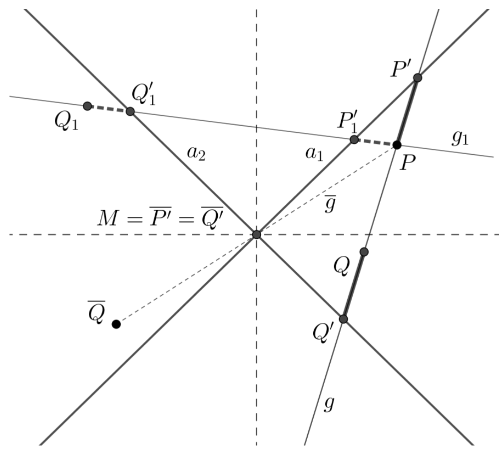
Lösung.



1) Wir zeichnen eine beliebige Gerade g durch P und bestimmen ihre Schnittpunkte P' mit a_1 und Q' mit a_2.



2) Somit können wir den zweiten Schnittpunkt Q von g mit der Hyperbel konstruiert. Da die Mittelpunkte von PQ und $P'Q'$ gleich sind, gilt auch $P'P = Q'Q$, und wir erhalten Q auf g indem wir eine Strecke der Länge $P'P$ von Q' auf g abschlagen, wobei wir berücksichtigen müssen, in welchen der durch a_1 und a_2 bestimmten Quadranten der Ebene Punkte der Hyperbel liegen können. (Alternativ könnten wir natürlich auch zuerst den Mittelpunkt H der Strecke $P'Q'$ konstruieren, und dann Q durch Spiegelung von P and H erhalten.)

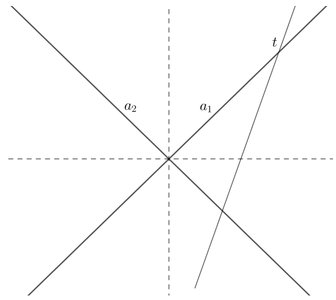


3) Schließlich wiederholt man diese Vorgänge mit weiteren Lagen. In dieser Figur sind es zwei weitere Lagen von g, nämlich die Geraden g_1 und $\overline{g}$ ergänzt, die etwas andere Lagen der entsprechenden resultierenden Punkte Q_1 bzw. $\overline{Q}$ ergeben. Die Lage von g_1 ist so gewählt, dass Q_1 und P auf verschiedenen Ästen der Hyperbel liegen, und $\overline{g}$ ist als Verbindung von P mit dem Hyperbelmittelpunkt M gewählt. Diese Auswahl hat zur Folge, dass die Punkte M, $\overline{P'}$ und $\overline{Q'}$ alle zusammenfallen, und $\overline{Q}$ der symmetrische Punkt zu P bezüglich M ist.

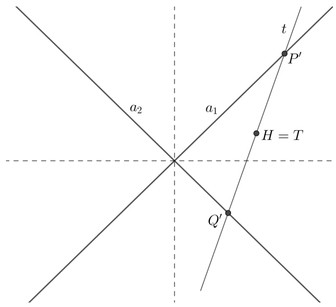
□

Nun wenden wir uns einigen Konstruktionen zu, die wir aus den obigen Erkenntnissen ableiten können. Besonders aus folgenden: Wenn die Gerade g eine Tangente der Hyperbel ist gilt $P = Q = H$.

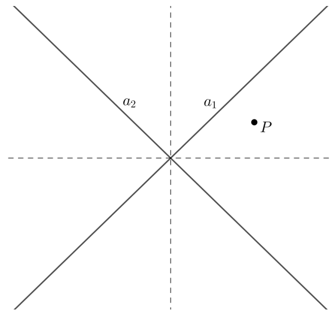
In der Figur nebenan sind die Asymptoten a_1 und a_2 einer Hyperbel, sowie eine Hyperbeltangente t gegeben.



Zeichnet man die Schnittpunkte P' und Q' von t mit a_1 bzw. a_2 ein, erhält man den Mittelpunkt H der Strecke $P'Q'$. Der Mittelpunkt H ist dann auch der Berührpunkt T der Tangente t mit der Hyperbel.



Sind die Asymptoten a_1 und a_2 einer Hyperbel, sowie eine Hyperbeltangente t gegeben. Dann ist der Mittelpunkt H der Strecke $P'Q'$,wobei P' und Q' die Schnittpunkte von t mit a_1 bzw. a_2, auch der Berührpunkt T der Tangente t mit der Hyperbel.

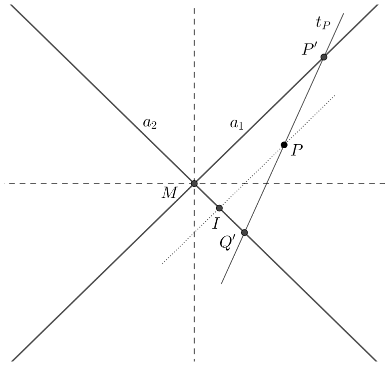


In der Figur nebenan sind die Asymptoten a_1 und a_2 einer Hyperbel, sowie ein Hyperbelpunkt P gegeben.
Die Konstruktion der Hyperbeltangente t_P in P, die aus der Tangenteneigenschaft folgt.

1) Legt man eine Gerade durch P und parallel zu a_1 schneidet diese die andere Asymptote a_2 in einem Hilfspunkt I.

2) Konstruieren wir dann den symmetrischen Punkt Q' zum Hyperbelmittelpunkt M bezüglich I.

3) Und anschließend den Schnittpunkt von PQ' mit a_1. Da $IM = IQ'$ und $PI \parallel a_1$ gilt, folgt aus dem Strahlensatz auch $PQ' = PP'$, und die Gerade $P'Q' = t_P$ ist somit die Hyperbeltangente in P.



Sind die Asymptoten a_1 und a_2 einer Hyperbel, sowie ein Hyperbelpunkt P gegeben. Dann ist die Gerade g durch die Punkte PQ', wobei Q' der symmetrische Punkt zum Hyperbelmittelpunkt M auf a_2 ist, die Hyperbeltangente in P.

Dieses Werk des Projekts MmF unterliegt einer CC BY-NC-ND 4.0 Lizenz.
https://mmf.univie.ac.at