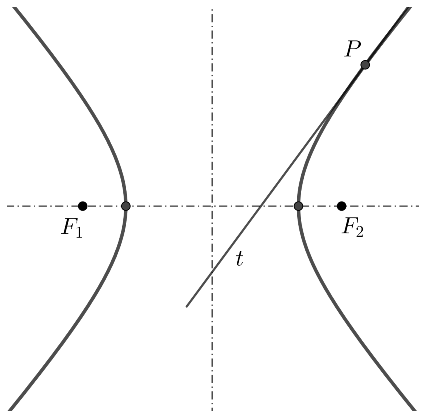
# GRUNDLAGENBLATT – HYPERBELTANGENTEN

**Fragen & Antworten auf diesem Grundlagenblatt**

- ✓ Wie ist eine **Hyperbeltangente** definiert?
- ✓ Wie konstruiert man eine Tangente eines gegebenen Hyperbelnpunktes?
- ✓ Wie sind die **Gegenkreise** einer Hyperbel definiert?
- ✓ Wie kann man eine Hyperbel mit Hilfe eines Gegenkreises punktweise konstruieren?

**Tangente einer Hyperbel**

Unter einer **Tangente** einer Hyperbel versteht man eine Gerade $t$, die mit der Hyperbel genau einen Punkt $P$ gemeinsam hat. Man sagt, die Tangente **berührt** die Hyperbel im Punkt $P$, den man als den **Berührpunkt** von $t$ mit der Hyperbel bezeichnet.




Da die Definition der Hyperbel der entsprechenden Ellipsendefinition vollkommen analog ist, ist es auch nicht überraschend, dass die Tangentenkonstruktionen der Hyperbel, die von dieser Defintion abgeleitet werden, denen der Ellipse ebenfalls vollkommen analog sind. Ein Vergleich dieses Kapitels GB – Ellipsentangenten zeigt diese Analogie auch sehr deutlich.

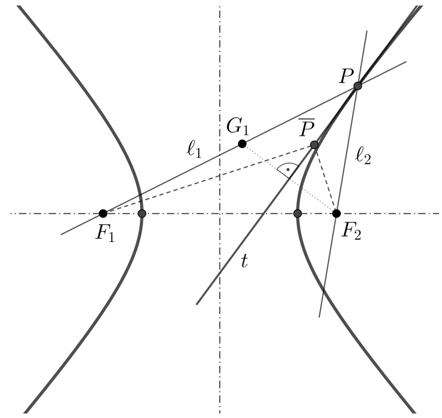
*Datum:* 17. November 2022.

**Konstruktion 1** (Hyperbeltangente)**.** Konstruiere die Tangente im Punkt $P$ einer Hyperbel mit Brennpunkten $F_1$ und $F_2$ und Hauptachsenlänge $2a$.

*Lösung.* Kennt man einen Punkt $P$ einer Hyperbel, und die beiden Brennpunkte $F_1$ und $F_2$, ist es nicht schwer, die Tangente der Hyperbel in $P$ zu konstruieren.

**1)** Die Tangente $t$ in $P$ ist nämlich die Winkelsymmetrale der schneidenden Geraden $PF_1$ und $PF_2$, die die Strecke $F_1F_2$ schneidet.

(Die beiden Geraden $PF_1 = \ell_1$ und $PF_2 = \ell_2$ bezeichnet man, wie bei der Ellipse, als die *Leitstrahlen* von $P$. Wir bemerken, dass die Tangenten im Ellipsenfall genau die Winkelsymmetrale der Leitstrahlen ist, die die Verbindungsstrecke der Brennpunkte *nicht* schneidet.)




Wir wollen diese Tatsache mithilfe der abgebildeten Figur begründen.

Nehmen wir an, $t$ wäre die Winkelsymmetrale der beiden Geraden $\ell_1$ und $\ell_2$, die die Strecke $F_1F_2$ schneidet. (Wir erinnern uns daran, dass die andere Winkelsymmetrale dieser beiden Geraden zu dieser normal steht, und daher die *Hyperbelnormale* in $P$ sein wird.) Die Gerade $t$ hat auf jeden Fall den Punkt $P$ mit der Hyperbel gemein. Wenn wir zeigen können, dass es keinen weiteren Punkt von $t$ geben kann, der gleichzeitig auf der Hyperbel liegt, so muss $t$ die Tangente der Hyperbel in $P$ sein.

Nehmen wir also an, es gäbe einen weiteren Punkt $\overline{P} \neq P$ von $t$, der auch auf der Hyperbel liegt. Das bedeutet, dass dieser Punkt die Hyperbeldefinition erfüllt, und es muss daher

$$|\overline{P}F_1 - \overline{P}F_2| = 2a$$

gelten. Wir werden zeigen, dass diese Annahme jedenfalls zu einem Widerspruch führt.

Da der Punkt $P$ auf der Hyperbel liegt, gilt sicher

$$PF_1 - PF_2 = 2a.$$

(Wir nemhen im Moment o.B.d.A. an, dass $PF_1 > PF_2$ gilt.) Nun betrachten wir den Punkt $G_1$, der symmetrisch zu $F_2$ bezüglich $t$ liegt. (Wir bezeichnen diesen Punkt als *ersten Gegenpunkt von* $P$ bezüglich der Hyperbel.) Mit den Punkten $F_2$ und $G_1$ liegen auch die Strecken $PF_2$ und $PG_1$ symmetrisch bezüglich $t$, und diese beiden Strecken sind daher sicher gleich lang. Da außerdem $t$ sowohl die Streckensymmetrale von $F_2G_1$ als auch die Winkelsymmetrale von $\angle \ell_1\ell_2$ ist, liegt $G_1$ sicher auf der Geraden $\ell_1$. Es folgt also, dass $G_1$ auf der Geraden $\ell_1$ liegt, mit

$$F_1G_1 = F_1P - PG_1 = F_1P - PF_2 = 2a.$$

Nun kehren wir zum Punkt $\overline{P} \neq P$ auf $t$ zurück. Wir haben angenommen, dass der Punkt auf der Hyperbel liegt, was bedeutet, dass $|\overline{P}F_1 - \overline{P}F_2| = 2a$ gilt. Da $\overline{P}$ auf $t$ liegt, und $F_2$ und $G_1$ bezüglich $t$ symmetrisch liegen, liegen auch die Strecken $\overline{P}F_2$ und $\overline{P}G_1$ symmetrisch bezüglich $t$, womit $\overline{P}F_2 = \overline{P}G_1$ gilt. Daraus folgt aber auch

$$|\overline{P}F_1 - \overline{P}G_1| = |\overline{P}F_1 - \overline{P}F_2| = 2a.$$

Die drei Punkte $\overline{P}$, $F_1$ und $G_1$ bilden aber ein Dreieck, da wir $\overline{P} \neq P$ angenommen haben, und es gilt somit die Dreiecksungleichung

$$|\overline{P}F_1 - \overline{P}G_1| < F_1G_1 = 2a,$$

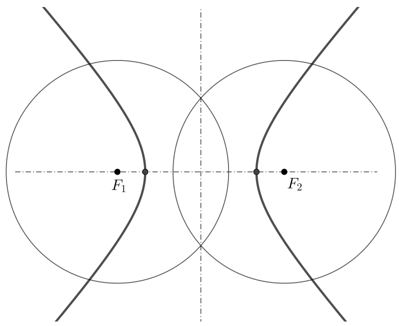
im Widerspruch zur Annahme. Es kann also keinen derartigen Punkt $\overline{P}$ geben, womit $t$ eine Tangente der Hyperbel ist. □

**Gegenkreis**

Wir sehen, dass alle ersten Gegenpunkte der Hyperbel auf dem Kreis mit Mittelpunkt $F_1$ und Radius $2a$ liegen. Wir bezeichnen diesen Kreis als **ersten Gegenkreis** der Hyperbel.

Analog definieren wir auch den zweiten Gegenpunkt $G_2$ von $P$ als das Ergebnis der Spiegelung von $F_1$ an der Tangente in $P$ und den zweiten Gegenkreis der Hyperbel als Kreis mit Mittelpunkt $F_2$ und Radius $2a$. Alle Überlegungen, die wir für den ersten Gegenpunkt anstellen gelten natürlich vollkommen analog für den zweiten Gegenpunkt.

Die Gegenkreise sind in nebenstehender Figur abgebildet.

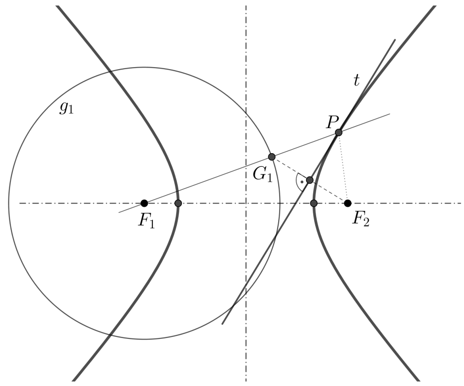


**Konstruktion 2** (Hyperbelkonstruktion mittels Gegenkreises)**.** Es seien die beiden Brennpunkte $F_1$ und $F_2$, sowie die Hauptachsenlänge $2a$ einer Hyperbel gegeben. Konstruiere die Hyperbel punktweise mittels eines Gegenkreises.

*Lösung.* Mit Hilfe des Gegenkreises erhalten wir eine weitere Möglichkeit, die Hyperbel punktweise (und tangentenweise) zu konstruieren.

**1)** Wir zeichnen den ersten Gegenkreis $g_1$ der Hyperbel, also den Kreis mit Mittelpunkt $F_1$ und Radius $2a$.

**2)** Wählen wir nun einen beliebigen Punkt $G_1$ auf $g_1$, so ist der Schnittpunkt der Verlängerung des Radius $F_1G_1$ des Gegenkreises mit der Streckensymmetrale $t$ von $F_2G_1$ sicher ein Punkt der Hyperbel, und die Gerade $t$ die Tangente in $P$.




Um dies einzusehen, können wir das Argument von oben in umgekehrter Reihenfolge verwenden.

Da $P$ auf der Streckensymmetrale von $F_2G_1$ liegt, gilt $PF_2 = PG_1$. Daraus folgt aber auch

$$|PF_1 - PF_2| = |PF_1 - PG_1| = F_1G_1 = 2a,$$

womit $P$ sicher ein Punkt der Hyperbel mit den Brennpunkten $F_1$ und $F_2$ und der Hauptachsenlänge $2a$ ist. Die Tatsache, dass $t$ die Hyperbeltangente in diesem Punkt $P$ ist, folgt wieder aus der Überlegung, die in Figur zu Konstruktion 1 dargestellt ist. □