GRUNDLAGENBLATT – INKREIS UND ANKREIS

Fragen & Antworten auf diesem Grundlagenblatt

- ✓ Gibt es in jedem Dreieck einen Kreis, der alle Seiten des Dreiecks von innen berührt?
- ✓ Gibt es zu jedem Dreieck Kreise, die eine der Seiten von außen und gleichzeitig die Verlängerung der übrigen Seiten berühren?
- ✓ Wie konstruiert man den **Inkreis** und die **Ankreise**?
- ✓ Welchem besonderen Punkt entspricht der Inkreismittelpunkt im Dreieck, das aus den drei Ankreismittelpunkten gebildet wird?
- ✓ Welche Eigenschaften haben die Tangentenstrecken, die ausgehend von den Eckpunkten des Dreiecks an die In- und Ankreise gelegt werden?
- ✓ Was ist der **Nagelpunkt** eines Dreiecks?

Die Frage nach der Konstruktion von Kreisen, die alle Seiten eines Dreiecks berühren, führt zu vielen interessanten Ergebnissen.

Inkreis

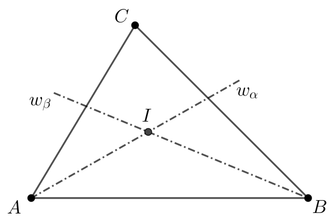
Es gibt in jedem Dreieck einen Kreis, der alle Seiten des Dreiecks von innen berührt, den **Inkreis** des Dreiecks.

Existenz des Inkreismittelpunkts

Gegeben sei ein Dreieck ABC. Es existiert im Inneren des Dreiecks ein eindeutiger Punkt I, dessen Normalabstände zu den Dreiecksseiten alle gleich lang sind.

Beweis. Um diese Behauptung zu beweisen, zeichnen wir ein Dreieck ABC und seine (Innen-)winkelsymmetralen w_α und w_β in A bzw. B.

Wir bezeichnen den Schnittpunkt dieser beiden Strahlen als I.



Datum: 17. November 2022.

Auf dem Strahl w_α liegen alle Punkte, deren Normalabstände zu den Strahlen AB und AC gleich groß sind. Ebenso liegen auf dem Strahl w_β alle Punkte, deren Normalabstände zu den Strahlen BA und BC gleich groß sind. Der gemeinsame Punkt I dieser beiden Strahlen ist somit der einzige Punkt, dessen Normalabstände zu allen vier Strahlen gleich groß ist. (Mit anderen Worten, ist der Normalabstand zur Strecke AB gleich groß wie sein Normalabstand zu den beiden Strahlen AC und BC.) Da der Punkt I im inneren Bereich beider Winkel $\angle BAC$ und $\angle CBA$ liegt, ist I auch sicher ein innerer Punkt des Dreiecks, und der Beweis ist komplett. □

Eindeutigkeit des Inkreismittelpunkts

Die drei Innenwinkelsymmetralen eines beliebigen Dreiecks ABC schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt, dem Inkreismittelpunkt I des Dreiecks.

Beweis. Da der Normalabstand von I zu den Strahlen AC und BC gleich groß ist, und I auch im Inneren des Dreiecks liegt, sind auch die Normalabstände von I zu den beiden Strecken AC und BC gleich groß, womit I auf der Winkelsymmetrale w_γ von $\angle ACB$ liegen muss. Damit ist auch die Eindeutigkeit des Inkreismittelpunktes gezeigt. □

Konstruktion 1. Konstruiere den Inkreis eines Dreiecks ABC.

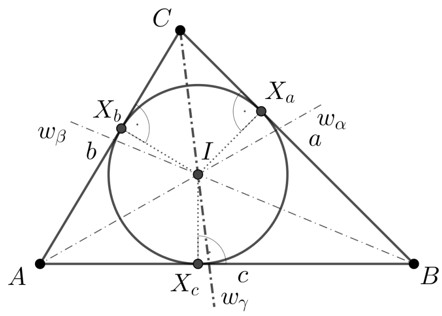
1) Dazu zeichnen wir zuerst zwei Winkelsymmetralen des Dreiecks, der Schnittpunkt ist I.

2) Wir bestimmen einen Lotfußpunkt von I auf eine der Seiten a, b oder c des Dreiecks. Diesen bezeichnen wir als X_a, X_b bzw. X_c.

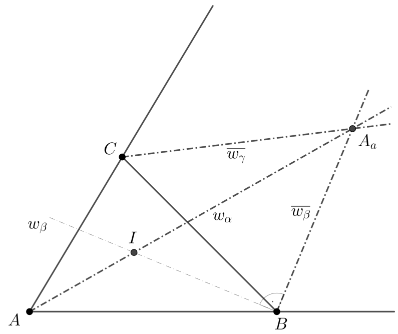
3) Wir können nun den Kreis mit Mittelpunkt I konstruieren, auf dem der Lotfußpunkt liegt.

4) Da die Abstände aller drei Lotfußpunkte X_a, X_b und X_c von I alle gleich groß sind, liegen auch die beiden anderen Lotfußpunkte auf dem Kreis.

5) Wir nennen den Kreis *Inkreis* von $\triangle ABC$. Dieser berührt nach Konstruktion alle Seiten von innen.



Verlängern wir nun die beiden Strahlen AB und AC über B bzw. C hinaus und schneiden w_α mit der resultierenden Außenwinkelsymmetrale $\overline{w_\beta}$ in B, erhalten wir analog einen eindeutigen Punkt A_a, der wiederum von vier Strahlen (jetzt AB, AC, BC und die Verlängerung von AB über B hinaus) denselben Nomalabstand besitzt.

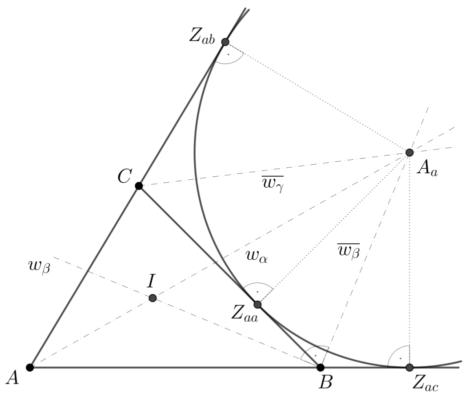


Mit dem analogen Argument zu jenem des Inkreismittelpunkts, erhalten wir daher folgendes Ergebnis.

Ankreis

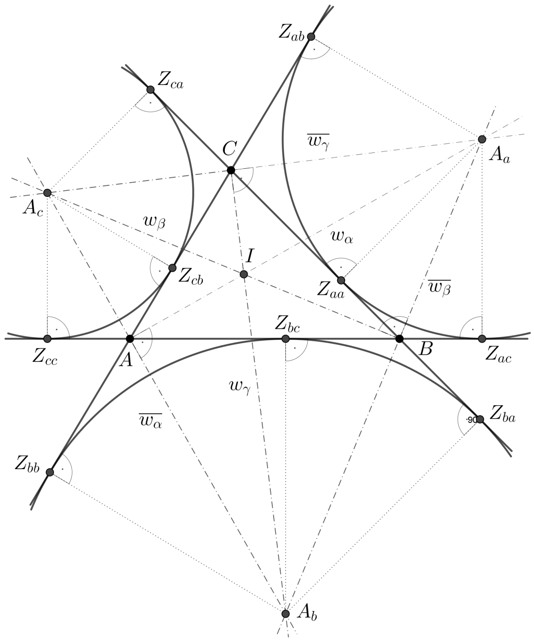
Gegeben sei ein Dreieck ABC. Es existiert im Inneren des Winkelfelds $\angle BAC$, außerhalb des Dreiecks, ein eindeutiger Punkt A_a, dessen Normalabstände zu den Trägergeraden der Dreiecksseiten alle gleich lang sind. Die Innenwinkelsymmetrale w_α von ABC schneidet die beiden Außenwinkelsymmetralen $\overline{w_\beta}$ und $\overline{w_\gamma}$ in diesem Punkt A_a, dem *Ankreismittelpunkt* des Dreiecks an der Seite a.

Die Tatsache, dass $\overline{w_\gamma}$ durch A_a geht, folgt analog zur Überlegung für w_γ und I.



Wir bezeichnen die Lotfußpunkte von A_a auf die Seiten a, b und c des Dreiecks der Reihe nach als Z_{aa}, Z_{ab} bzw. Z_{ac}. Da ihre Abstände von A_a alle gleich groß sind, liegen sie auf einem gemeinsamen Kreis mit Mittelpunkt A_a, dem *Ankreis* von ABC an der Seite a. Analog gibt es dann auch einen eindeutigen Ankreismittelpunkt A_b an der Seite b im Winkelfeld $\angle CBA$ und einen eindeutigen Ankreismittelpunkt A_c an der Seite c im Winkelfeld $\angle ACB$. Diese sind dann Mittelpunkte der Ankreise von ABC an den Seiten b bzw. c.

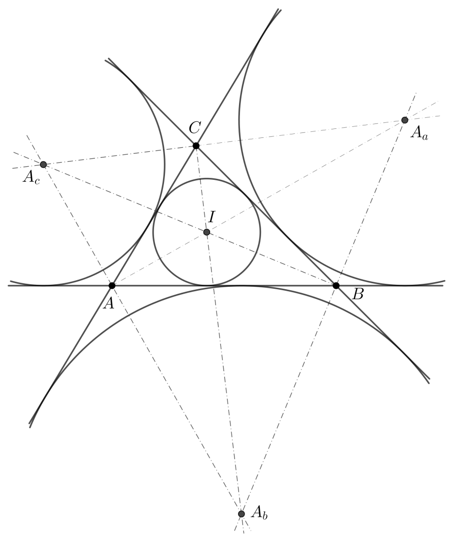
Wir bezeichnen die Lotfußpunkte von A_b auf die Seiten a, b und c des Dreiecks der Reihe nach analog als Z_{ba}, Z_{bb} bzw. Z_{bc}. Da ihre Abstände von A_b alle gleich groß sind, liegen auch diese auf einem gemeinsamen Kreis mit Mittelpunkt A_b, dem *Ankreis* von ABC an der Seite b. Ebenso definieren wir die Lotfußpunkte von A_c auf die Seiten a, b und c des Dreiecks der Reihe nach als Z_{ca}, Z_{cb} bzw. Z_{cc} und auch diese liegen auf einem gemeinsamen Kreis mit Mittelpunkt A_c, dem *Ankreis* von ABC an der Seite c.



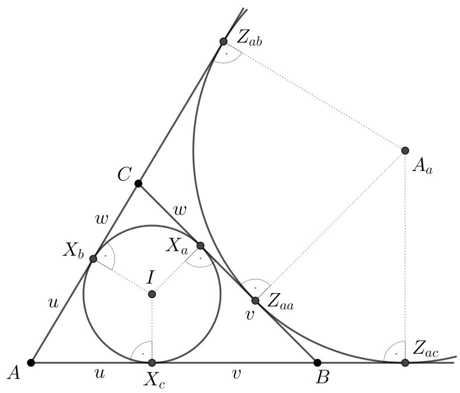
Wir bemerken auch noch, dass die Innenwinkelsymmetralen natürlich jeweils normal zu den entsprechenden Außenwinkelsymmetralen liegen. Dies hat zur Folge, dass der Inkreismittelpunkt I (als Schnittpunkt der Geraden w_α, w_β und w_γ) der Höhenschnittpunkt im Dreieck $A_aA_bA_c$ sein muss, da $\overline{w_\alpha}, \overline{w_\beta}$ und $\overline{w_\gamma}$ die Trägergeraden der Seiten dieses Dreiecks sind.

Inkreis und Ankreise

Zusammenfassend sehen wir, dass es zu jedem Dreieck vier Kreise gibt, die jeweils alle drei Trägergeraden der Dreiecksseiten berühren, nämlich den Inkreis und die drei Ankreise des Dreiecks.



Nun gibt es einige interessante Beziehungen zwischen den Tangentenstrecken, die von den Eckpunkten des Dreiecks ABC an die In- bzw. Ankreise gelegt werden. Um diese zu betrachten, beachten wir, dass die beiden Tangentenstrecken von einem Punkt an einen Kreis immer gleich lang sind und definieren $u = AX_c = AX_b, v = BX_c = BX_a$ und $w = CX_a = CX_b$.



Da auch die beiden Tangentenstrecken von A an den Ankreis in a gleich lang sind, gilt $AZ_{ac} = AZ_{ab}$. Nun gilt aber ebenso auch $BZ_{ac} = BZ_{aa}$ und $CZ_{aa} = CZ_{ab}$. Wir erhalten also folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} & AZ_{ac} = AZ_{ab}. \\ \iff & AB + BZ_{ac} = AC + CZ_{ab} \\ \iff & AB + BZ_{aa} = AC + CZ_{aa} \end{aligned}$$

Nun gilt aber offensichtlich

$$AB + BZ_{aa} + AC + CZ_{aa} = a + b + c,$$

und somit

$$AZ_{ac} = AZ_{ab} = AB + BZ_{aa} = AC + CZ_{aa} = \frac{1}{2} \cdot (a + b + c).$$

Verwenden wir ferner die übliche Bezeichnung $\frac{1}{2} \cdot (a + b + c) = s$, erhalten wir nun auch folgende Beziehungen.

Wegen

$$a + b + c = 2u + 2v + 2w = s \iff z + v + w = s,$$

erhalten wir

$$AZ_{ac} = s = AX_c + X_cB + BZ_{ac} = u + v + BZ_{ac} \iff w = BZ_{ac},$$

und analog

$$AZ_{ab} = s = AX_b + X_bC + CZ_{ab} = u + w + CZ_{ab} \iff v = CZ_{ab}.$$

Dies ergibt zusammenfassend folgendes Ergebnis.

Tangentenstrecken an den Ankreis

a) $AZ_{ac} = AZ_{ab} = s = \frac{1}{2} \cdot (a + b + c)$

„Die Tangentenstrecken von einem Eckpunkt eines Dreiecks an den Ankreis im inneren Winkelfeld dieses Eckpunkts hat den halben Dreiecksumfang als Länge.“

b) $BZ_{aa} = CX_a = w$ und $CZ_{aa} = BX_a = v$

„Die Länge der Tangentenstrecke von einem Eckpunkt an den Inkreis an einer Dreiecksseite ist gleich der Tangentenstrecke vom gegenüberliegenden Eckpunkt derselben Dreiecksseite an den Ankreis an dieser Seite.“

Da wir entsprechende Beziehungen für die übrigen Seiten des Dreiecks durch Umbenennung erhalten können, gilt analog auch

$$BZ_{bc} = BZ_{ba} = s = \frac{1}{2} \cdot (a + b + c) \quad \text{und} \quad CZ_{bb} = AX_b = u \quad \text{und} \quad AZ_{bb} = CX_b = w$$

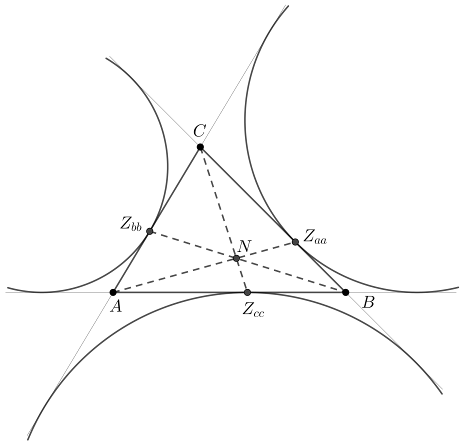
und

$$CZ_{ca} = CZ_{cb} = s = \frac{1}{2} \cdot (a + b + c) \quad \text{und} \quad AZ_{cc} = BX_c = v \quad \text{und} \quad BZ_{cc} = AX_c = u.$$

Abschließend betrachten wir noch einen Punkt in Zusammenhang mit Ankreisen.

Nagelpunkt

Die drei Strecken AZ_{aa}, BZ_{bb} und CZ_{cc} in jedem Dreieck treffen einander in einem gemeinsamen Punkt N, dem sogenannten *Nagelpunkt* des Dreiecks.



Dies kann man mit dem *Satz von Ceva*, auf den hier nicht näher eingegangen wird, beweisen.