Grundlagenblatt – Kollineation zwischen der Ellipse und einem Scheitelkrümmungskreis

Fragen & Antworten auf diesem Grundlagenblatt

- ✓ Wie ist ein Fernpunkt charakterisiert?
- ✓ Wie ist die projektive Ebene definiert?
- ✓ Welche Eigenschaften hat eine perspektive Kollineation?
- ✓ Wie kann man die Kollineation nutzen, um eine Ellipse zu konstruieren?
- ✓ Wie kannst du mithilfe dieser Abbildung die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Ellipse euklidisch konstruieren?
- ✓ Wie kannst du mithilfe eines Fernpunktes Tangenten an Ellipsen konstruieren?

Nachdem wir uns in den vorangegangenen Abschnitten mit den Anwendungen affiner Beziehungen der Ellipse zu diversen Kreisen beschäftigt haben, sind wir bereit einen weiteren Verallgemeinerungsschritt zu machen. Zu diesem Zweck benötigen wir zunächst ein Konzept, das auf den ersten Blick vielleicht etwas überraschend wirken mag. Dieses Konzept ermöglicht aber einen Zugang zu einer Vielzahl weiterer Konstruktionsmöglichkeiten. Das Konzept, um das es geht, ist der des *Fernpunkts*.

Datum: 17. November 2022.

Die projektive Ebene

Fernpunkt MmF

Es ergibt sich eine sinnvolle Erweiterung des gewöhnlichen Punktbegriffs, wenn man folgende Idee umsetzt. In der euklidischen Ebene haben zwei verschiedene Geraden immer einen eindeutigen gemeinsamen Punkt, wenn sie nicht zueinander parallel sind. Nun kann man diese Ausnahme der Parallelität (zunächst rein rhetorisch) einbinden, wenn man davon spricht, dass auch zueinander parallele Geraden einen eindeutigen Schnittpunkt haben, nämlich einen gemeinsamen sogenannten **Fernpunkt**.

Projektive Ebene MmF

Mit dieser Idee kann man nun die **projektive Ebene** definieren. Diese besteht aus der Menge aller Punkte der euklidischen Ebene (die „eigentlichen“ Punkte), zusammen mit den so definierten Fernpunkten. Definiert man nun zusätzlich noch die Menge aller Fernpunkte als eine besondere zusätzliche Gerade (die **Ferngerade**), gelten folgende sehr einfache Verknüpfungsregeln.

1) Zwei verschiedene Punkte der projektiven Ebene haben immer genau eine gemeinsame Verbindungsgerade.

2) Zwei verschiedene Geraden der projektiven Ebene haben immer genau einen gemeinsamen Schnittpunkt.

MmF

Die erste dieser Regeln ist in diesem Kontext die Zusammenfassung von drei Tatsachen in der euklidischen Ebene:

i) Einerseits bestimmen zwei eigentliche Punkte immer eine eindeutige Verbindungsgerade.

ii) Weiters gibt es (laut Parallelenaxiom) zu jeder Geraden durch jeden Punkt immer eine eindeutige Parallele. Dies interpretieren wir in der neuen Sprechweise so, dass jeder eigentliche Punkt mit jedem Fernpunkt eine eindeutige Verbindungsgerade bestimmt.

iii) Schließlich ist die Ferngerade die eindeutige Verbindungsgerade von je zwei beliebigen Fernpunkten.

Die perspektive Kollineation

Perspektive Kollineation

In der projektiven Ebene können wir nun eine Punktabbildung analog zur perspektiven Affinität definieren. Diese Abbildung bezeichnen wir als **perspektive Kollineation**.
Sie hat folgende Eigenschaften:

1) Es existiert eine Gerade, die aus lauter Fixpunkten der Abbildung besteht, die **Kollineationsachse**.

2) Die Verbindungsgeraden aller Punkte P der Ebene mit ihren jeweiligen Bildpunkten $\overline{P}$ gehen durch einen gemeinsamen Punkt, dem **Kollineationszentrum**. Man bezeichnet diese Verbindungsgeraden als **Kollineationsstrahlen**.

3) Die Abbildung ist in der projektiven Ebene (unter Ausschluss des Kollineationszentrums) *bijektiv*, also umkehrbar eindeutig. Jedem Punkt P wird eindeutig ein Bildpunkt $\overline{P}$ zugeordnet, und jeder Bildpunkt $\overline{P}$ hat einen eindeutigen Urbildpunkt P.

4) Die Abbildung ist geradentreu. Punkte P, Q und R, die auf einer gemeinsamen Geraden liegen, werden auf Punkte $\overline{P}$, $\overline{Q}$ und $\overline{R}$ abgebildet, die ebenfalls auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Da jede perspektive Kollineation geradentreu ist, ist jede solche Abbildung wieder linear. Allerdings benötigen wir für die analytische Behandlung der projektiven Ebene ein etwas modifiziertes Koordinatensystem. Die Einführung eines solchen Koordinatensystems würde den Rahmen dieser Ausführungen etwas sprengen, und wir verzichten daher an dieser Stelle darauf. Damit verzichten wir auch auf exakte Begründungen dafür, dass es derartige Abbildungen überhaupt geben kann, aber eine solche Exaktifizierung ist für die konstruktive Anwendung nicht notwendig, und hier geht es uns nur um solche Konstruktionen.

Es ist interessant zu bemerken, dass Fernpunkte bei einer solchen Abbildung auf eigentliche Punkte abgebildet werden können und umgekehrt. Diese etwas unerwartete Eigenschaft wird uns bei der praktischen Anwendung der Kollineation im Folgenden noch etwas beschäftigen.

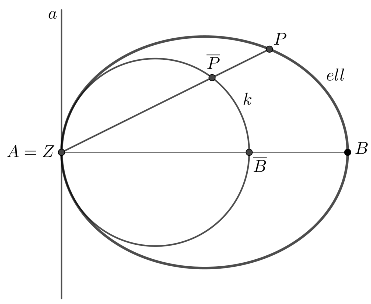
Kollineare Abbildung eines Kreises

Das Bild eines Kreises, also einer Kurve zweiten Grades, bei einer solchen linearen Abbildung ist wieder eine Kurve zweiten Grades. Dies kann man prinzipiell im geeigneten Koordinatensystem rechnerisch auf analoge Weise nachvollziehen, wie es am GB – Affinität zum Hauptscheitelkreis für die normale perspektive Affinität durchgeführt wurde.

Wählt man die Kollineation so, dass die Punkte des Kreises alle auf eigentliche Punkte abgebildet werden, ist das Bild des Kreises als geschlossene Kurve daher eine geschlossene Kurve zweiten Grades, und somit eine Ellipse. (Es ist bemerkenswert festzustellen, dass es aber auch die Möglichkeit von Kreispunkten gibt, die auf Fernpunkte abgebildet werden. Gibt es solche, so wird der Kreis auf eine Parabel oder Hyperbel abgebildet. Mit dieser Situation werden sich die entsprechenden Abschnitte in den Kapiteln zu den Themen Parabel bzw. Hyperbel auseinandersetzen.)

Es stellt sich heraus, dass man diese Ideen nun auf eine ganz spezielle Art für Ellipsenkonstruktionen ausnutzen kann. Um uns mit dieser Möglichkeit etwas vertraut zu machen, betrachten wir die folgende Figur.

In dieser Figur sehen wir eine Ellipse *ell* und ihren Hauptscheitelkrümmungskreis k, der die Ellipse im Scheitel A berührt. Es stellt sich heraus, dass es eine perspektive Kollineation gibt, die den Scheitelkrümmungskreis auf die Ellipse punktweise abbildet. Das Kollineationszentrum Z liegt dabei im Berührscheitel A und die Kollineationsachse ist die Scheiteltangente a in diesem Punkt.



Wieder verzichten wir an dieser Stelle auf einen Beweis dieser Behauptung, aber eine genauere Betrachtung der obigen Figur macht die Existenz einer solchen Abbildung durchaus plausibel. Der Schnittpunkt $\overline{B}$ der Ellipsenhauptachse mit dem Kreis k wird auf den zweiten Ellipsenhauptscheitel B abgebildet, und auch die Abbildung eines allgemeinen Kreispunktes $\overline{P}$ auf den entsprechenden Ellipsenpunkt P ist durch den zugehörigen Kollineationsstrahl angedeutet. (An dieser Stelle sollten wir es nicht unerwähnt lassen, dass es auch eine derartige perspektve Kollineation gibt, die den Nebenscheitelkrümmungskreis einer Ellipse auf die Ellipse abbildet. Auch in diesem Fall liegt das Kollineationszentrum im Berührpunkt und die Kollineationsachse in der gemeinsamen Scheiteltangente.)

Da die Kollineation bijektiv ist, kann man sie auch als Abbildung der Ellipse *ell* auf den Kreis k auffassen. Im Folgenden werden wir je nach Bedarf von der Abbildung in der einen oder anderen Richtung sprechen.

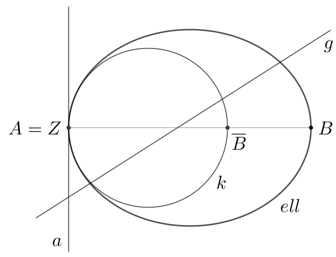
Schnitt einer Geraden mit einer Ellipse

Nun sind wir bereit, eine erste konstruktive Anwendung der perspektiven Kollineation zwischen einer Ellipse und ihrem Scheitelkrümmungskreis durchzuführen.

Konstruktion 1 (Euklidische Konstruktion der Schnittpunkte von Ellipse mit Gerade)**.** Gegeben ist eine Ellipse ell, sowie eine Gerade g. Konstruiere die Schnittpunkte von g mit ell mit euklidischen Mitteln exakt.

Lösung.

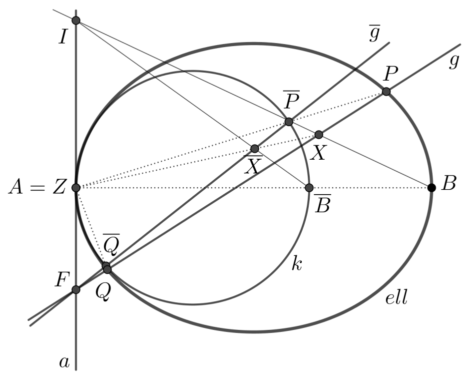
Zu diesem Zweck wollen wir die oben beschriebene perspektive Kollineation mit Achse a und Zentrum $Z = A$ ausnutzen, die die Ellipse auf den Hauptscheitelkrümmungskreis k abbildet. Dafür müssen wir die Bildgerade $\overline{g}$ von g bestimmen. Wenn wir diese Gerade kennen, kennen wir auch ihre Schnittpunkte $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ mit k, und somit auch auf den zugehörigen Kollineationsstrahlen die gesuchten Punkte P bzw. Q.



1) Um die Bildgerade $\overline{g}$ zu bestimmen, stellen wir zunächst fest, dass der Schnittpunkt F von g mit a ein Fixpunkt der Kollineation ist. Dieser Punkt liegt somit auch auf $\overline{g}$. Wir müssen also nur mehr einen einzigen weiteren Punkt von $\overline{g}$ bestimmen. Zu diesem Zweck wählen wir einen beliebigen Punkt X auf g. Um seinen Bildpunkt $\overline{X}$ zu bestimmen, zeichnen wir die Verbindungsgerade von B mit X.

2) Wir wissen, dass der Hauptscheitel B der Ellipse auf den Schnittpunkt $\overline{B}$ der Ellipsenhauptachse mit k abgebildet wird. Die Gerade BX, die a im Hilfspunkt I schneidet, wird daher auf die Gerade $\overline{B}I$ abgebildet. Wir erhalten also $\overline{X}$ als Schnittpunkt dieser Geraden mit dem Kollineationsstrahl durch X.

3) Die Gerade $\overline{g}$ ist also die Verbindungsgerade von F mit $\overline{X}$, und wir erhalten sofort die Schnittpunkte $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ von $\overline{g}$ mit k. Die entsprechenden Schnittpunkte P bzw. Q sind dann die Schnittpunkte der jeweiligen Kollineationsstrahlen mit g, was die Konstruktion abschließt.



□

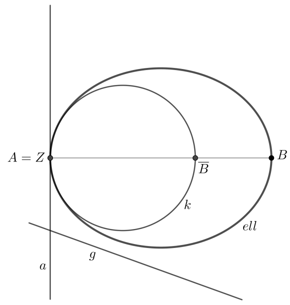
TANGENTENKONSTRUKTIONEN

Jede Tangentenkonstruktion, die wir mit Hilfe einer Affinität durchführen können, können wir auch mit Hilfe einer solchen Kollineation durchführen. Wollen wir, zum Beispiel, die Tangenten einer Ellipse konstruieren, die durch einen bestimmten Punkt P gehen, können wir das perspektiv kollineare Bild $\overline{P}$ dieses Punktes bestimmen, die Tangenten an k durch $\overline{P}$ konstruieren, und diese wieder mit Hilfe der Umkehrung der perspektiven Kollineation ins Ellipsenfeld übertragen.

Im Folgenden werden wir uns mit der Variante dieser Aufgabe auseinandersetzen, die in diesem Kontext bisher nicht betrachtete Aspekte einfließen lässt. Wir werden annehmen, dass der gegebene Punkt ein Fernpunkt ist, also mit anderen Worten, wir wollen die Tangenten einer Ellipse konstruieren, die zu einer gegebenen Geraden g (mit dem Fernpunkt P) parallel sind.

Konstruktion 2 (Ellipsentangenten mittels Fernpunkt)**.**

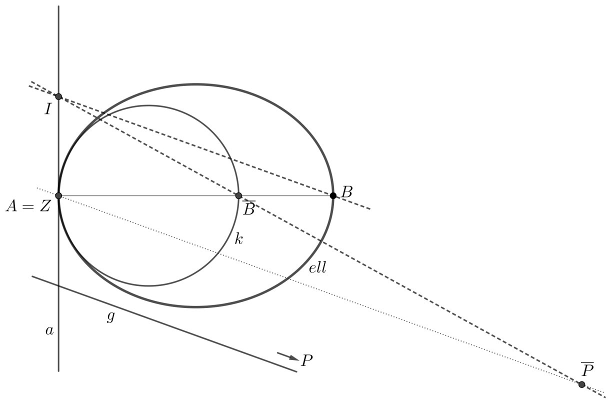
Gegeben ist die Ellipse ell, sowie die Gerade g. Konstruiere die Tangenten der Ellipse, die zu g (mit dem Fernpunkt P) parallel sind.



Lösung.

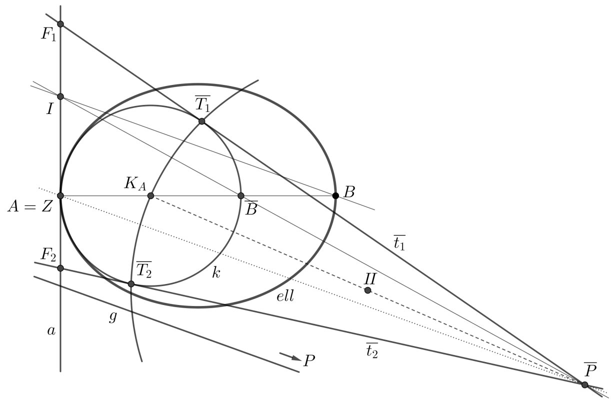
1) Da wir die perspektive Kollineation zwischen dieser Ellipse und dem Hauptscheitelkrümmungskreis dabei verwenden wollen, ist dieser Krümmungskreis k in obiger Figur bereits eingezeichnet. Dieser berührt ell in A, womit A auch das Kollineationszentrum Z ist. Ferner ist die Hauptscheiteltangente a in A bereits gezeichnet, die die Achse der Kollineation sein wird. Schließlich ist auch der zweite Hauptscheitel B von ell eingezeichnet, sowie sein Bild $\overline{B}$ bei der Kollineation und der Kollineationsstrahl durch B.

2) Nun konstruieren wir das kollineare Bild des Fernpunkts P von g. Dieser liegt auf dem Kollineationsstrahl durch P, also auf der Parallelen zu g durch Z. Wie in der vorigen Aufgabe, verbinden wir den Punkt P mit dem Punkt B, dessen Bild $\overline{B}$ bei der Kollineation bereits bekannt ist.



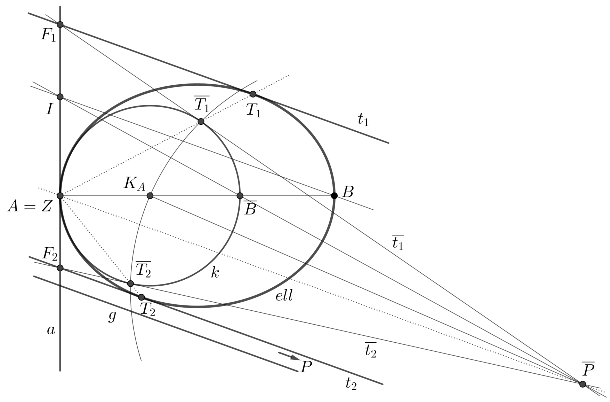
3) Dies ergibt die Parallele zu g durch B, die die Achse a im Hilfspunkt I scheidet. Die Gerade BP, auf der auch I liegt, geht also bei der Kollineation in die Gerade $I\overline{B}$ über, und wir erhalten $\overline{P}$ als Schnittpunkt des Kollineationsstrahls durch P mit der Geraden $I\overline{B}$.

4) Nun konstruieren wir die Tangenten von $\overline{P}$ und k. Da Kreistangenten immer normal stehen zu ihren jeweiligen Berührradien, erhalten wir die Berührungspunkte $\overline{T_1}$ und $\overline{T_2}$ der Tangenten $\overline{t_1}$ bzw. $\overline{t_2}$ als Schnittpunkte von k mit dem Thaleskreis über die Strecke $\overline{P}K_A$, wobei K_A als Krümmungsmittelpunkt in A der Mittelpunkt von k ist. Der Mittelpunkt II der Strecke $\overline{P}K_A$ ist der Mittelpunkt dieses Thaleskreises, der hier nur durch ein Bogenstück durch K_A angedeutet ist.



5) Nachdem wir die beiden Berührpunkte $\overline{T_1}$ und $\overline{T_2}$ kennen, erhalten wir die beiden Tangenten $\overline{t_1}$ und $\overline{t_2}$ als Verbindungsgeraden von $\overline{P}$ mit $\overline{T_1}$ bzw. $\overline{T_2}$. Ihre Schnittpunkte mit a werden mit F_1 bzw. F_2 bezeichnet. Diese sind aufgrund ihrer Fixpunktseigenschaft bei der Kollineation auch Punkte von t_1 bzw. t_2.

6) Wir kennen also t_1 als Gerade parallel zu g durch F_1 und t_2 als Gerade parallel zu g durch F_2. Ihre Berührpunkte kennt man auf den jeweils entsprechenden Kollineationsstrahlen. Es berühren t_1 die Ellipse also im Schnittpunkt T_1 von t_1 mit der Geraden $Z\overline{T_1}$ und t_2 die Ellipse im Schnittpunkt T_2 von t_2 mit der Geraden $Z\overline{T_2}$.



□