# GRUNDLAGENBLATT – KOLLINEATION ZWISCHEN HYPERBEL UND SCHEITELKRÜMMUNGSKREIS

**Fragen & Antworten auf diesem Grundlagenblatt**

- ✓ Wie ist die projektive Ebene definiert?
- ✓ Welche Eigenschaften hat eine perspektive Kollineation?
- ✓ Wie sind Fluchtpunkt und Fluchtgerade definiert?
- ✓ Wie kann man die Kollineation nutzen, um eine Hyperbel zu konstruieren?
- ✓ Wie kannst du mithilfe dieser Abbildung die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Hyperbel euklidisch konstruieren?
- ✓ Wie kannst du die Tangenten an die Hyperbel konstruieren die durch einen beliebigen Punkt geht?

Am GB – Kollineation zu Scheitelkrümmungskreis haben wir Konstruktionen betrachtet, die von der perspektiv kollinearen Beziehung zwischen einer Ellipse und einem ihrer Scheitelkrümmungskreise abgeleitet werden können. Diese Idee wollen wir nun in diesem Abschnitt auch auf analoge Weise auf die Hyperbel anwenden.

## Die projektive Ebene

**projektive Ebene**

Wir erinnern uns, dass wir die **projektive Ebene** dadurch definiert haben, dass wir die Punktmenge der euklidischen Ebene durch **Fernpunkte** erweitert haben, die wir als gemeinsame „Punkte“ paralleler (euklidischer) Geraden definieren. Die Menge aller Fernpunkte bildet dann die **Ferngerade**. In der resultierenden projektiven Ebene gelten folgende sehr einfache Verknüpfungsregeln.

**1)** Zwei verschiedene Punkte der projektiven Ebene haben immer genau eine gemeinsame Verbindungsgerade.

**2)** Zwei verschiedene Geraden der projektiven Ebene haben immer genau einen gemeinsamen Schnittpunkt.

*Datum:* 17. November 2022.

**perspektive Kollineation**

In der projektiven Ebene können wir nun die **perspektive Kollineation** definieren. Dies ist eine Punktabbildung mit der Eigenschaft:

**1)** Es existiert eine Gerade, die aus lauter Fixpunkten der Abbildung besteht, die *Kollineationssachse.*

**2)** Die Verbindungsgeraden aller Punkte $P$ der Ebene mit ihren jeweiligen Bildpunkten $\overline{P}$ gehen durch einen gemeinsamen Punkt, dem *Kollineationszentrum.* Man bezeichnet diese Verbindungsgeraden als *Kollineationsstrahlen.*

**3)** Die Abbildung ist *bijektiv.*

**4)** Die Abbildung ist *geradentreu.*

Wie schon am GB – Kollineation zu Scheitelkrümmungskreis verzichten wir an dieser Stelle auf eine exaktifizierende Begründung der Existenz derartger Abbildingen, zugunsten ihrer praktischen Anwendung.

Wir wissen schon vom GB – Kollineation zu Scheitelkrümmungskreis, dass Fernpunkte bei einer solchen Abbildung auf eigentliche Punkte abgebildet werden können und umgekehrt.

**Fluchtpunkt und Fluchtgerade**

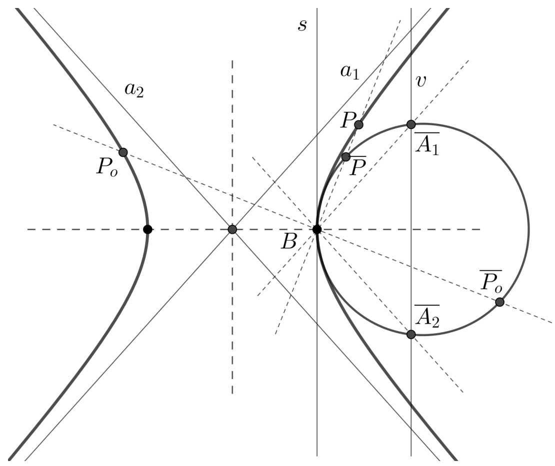
Punkte, die auf Fernpunkte abgebildet werden, bezeichnen wir als *Verschwindungspunkte.* Diese liegen auf der Geraden, die auf die Ferngerade abgebildet wird, der so-genannten *Verschwindungsgerade.* Bildpunkte von Fernpunkten bezeichnen wir als **Fluchtpunkte**. Diese liegen auf der Bildgeraden der Ferngerade, die wir als **Fluchtgerade** bezeichnen. Da der Fernpunkt der Kollineationsachse ein Fixpunkt der Abbildung ist, sind sowohl die Verschwindingsgerade als auch die Fluchtgerade sicher parallel zur Kollineationsachse.

## KOLLINEARE ABBILDUNG EINES KREISES AUF EINE HYPERBEL

Am GB – Kollineation zu Scheitelkrümmungskreis haben wir bereits festgestellt, dass das Bild eines Kreises bei einer perspektiven Kollineation eine Kurve zweiten Grades ist. Wählt man die Kollineation so, dass die Verschwindungsgerade diesen Kreis schneidet, wird der Kreis auf eine Hyperbel abgebildet. Auf den Nachweis dieser Tatsache verzichten wir im Moment. Analytische Behandlung derartiger Kollineationen, die den Rahmen dieser Ausführungen sprengen würden, ermöglichen den Nachweis.

Diese Ideen wollen wir nun für bestimmte Hyperbelkonstruktionen ausnutzen. Zu diesem Zweck, betrachten wir folgende Figur.

In dieser Figur sehen wir eine Hyperbel und ihren Scheitelkrümmungskreis dargestellt. Diese berühren einander im Scheitel $B$, und die gemeinsame Tangente in $B$ ist die Scheiteltangente $s$. Wie wir es schon im Fall der Ellipse am GB – Kollineation zu Scheitelkrümmungskreis kennen gelernt haben, stellt sich heraus, dass es eine perspektive Kollineation gibt, die den Scheitelkrümmungskreis auf die Parabel punktweise abbildet. Das Kollineationszentrum $Z$ liegt dabei wieder im Berührscheitel $B$ und die Kollineationsachse in der Scheiteltangente $s$ in diesem Punkt.




Wieder verzichten wir an dieser Stelle auf einen Beweis dieser Behauptung, aber eine genauere Betrachtung der obigen Figur macht die Existenz einer solchen Abbildung durchaus plausibel.

Da der Kreis auf eine Hyperbel abgebildet werden soll und die Hyperbel Fernpunkte besitzt, nämlich die Berührpunkte der Hyperbel mit den Asymptoten, muss die Verschwindungsgerade $v$ der Kollineation den Kreis schneiden. Die Schnittpunkte von $v$ mit dem Kreis liegen auf den Kollineationsstrahlen durch die Fernpunkte der Asymptoten, also auf den Parallelen zu den Asymptoten durch das Kollineationszentrum $B$. Diese Punkte sind in obiger Figur als $\overline{A_1}$ und $\overline{A_2}$ beschriftet. Wir erhalten also $v$ konstruktiv als Verbindungsgerade dieser beiden Punkte $\overline{A_1}$ und $\overline{A_2}$.

Bei dieser Abbildung wird auch der abgebildete Punkt $\overline{P}$ des Kreises auf den Punkt $P$ der Hyperbel abgebildet, wobei $Z = B$, $\overline{P}$ und $P$ auf einen gemeinsamen Kollineationsstrahl liegen. Da die Kollineation bijektiv ist, kann man sie auch als Abbildung der Hyperbel auf den Kreis auffassen, und bei dieser Interpretation ist $v$ die Fluchtgerade und $P$ wird auf $\overline{P}$ abgebildet. Im Folgenden werden wir wieder je nach Bedarf von der Abbildung in der einen oder anderen Richtung sprechen. Dasselbe gilt auch für die beiden Punkte $P_o$ der Hyperbel und $\overline{P_o}$ des Kreises. In der Figur sind $P$ und $P_o$ so gewählt, dass $\overline{P}$ und $\overline{P_o}$ auf verschiedenen Ästen der Hyperbel liegen. Wir stellen fest, dass die Kreispunkte, die zwischen den beiden Geraden $s$ und $v$ liegen auf die Punkte des Hyperbelasts abgebildet werden, der den Kreis in $B$ berührt, während die Kreispunkte auf der anderen Seite von $v$ auf die Punkte des anderen Asts abgebildet werden.

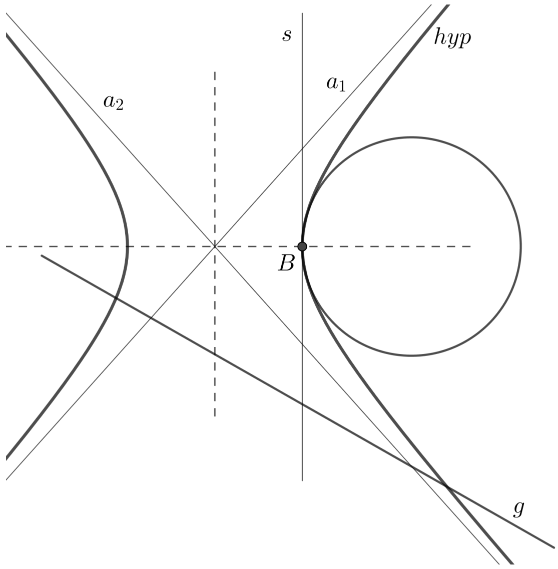
## Schnitt einer Geraden mit einer Hyperbel

Nun sind wir bereit, konstruktive Anwendungen der perspektiven Kollineation zwischen einer Hyperbel und ihrem Scheitelkrümmungskreis durchzuführen.

**Konstruktion 1** (Euklidische Konstruktion der Schnittpunkte von Hyperbel und Gerade)**.** Gegeben ist eine Hyperbel $hyp$ gegeben, sowie eine Gerade $g$. Konstruiere die Schnittpunkte von $g$ mit $hyp$ mit euklidischen Mitteln exakt.

*Lösung.*

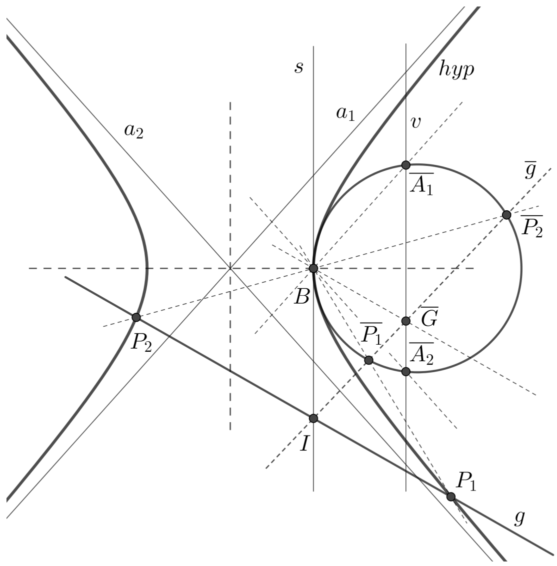
Zu diesem Zweck wollen wir die oben beschriebene perspektive Kollineation mit Achse $s$ und Zentrum $Z = B$ ausnutzen, die die Hyperbel auf den Scheitelkrümmungskreis in $B$ abbildet. Dafür müssen wir die Bildgerade $\overline{g}$ von $g$ bestimmen. Wenn wir diese Gerade kennen, kennen wir auch ihre Schnittpunkte $\overline{P_1}$ und $\overline{P_2}$ mit $k$, und somit auch auf den zugehörigen Kollineationsstrahlen die gesuchten Punkte $P_1$ bzw. $P_2$.




**1)** Um die Bildgerade $\overline{g}$ zu bestimmen, stellen wir zunächst fest, dass der Schnittpunkt $I$ von $g$ mit $s$ ein Fixpunkt der Kollineation ist. Dieser Punkt liegt somit auch auf $\overline{g}$. Wir müssen also nur mehr einen einzigen weiteren Punkt von $\overline{g}$ bestimmen. Zu diesem Zweck betrachten wir den Fernpunkt $G$ von $g$. Seinen Bildpunkt $\overline{G}$ liegt auf der Fluchtgerade $v$.

**2)** Wir wissen weiters, dass der Kollineationsstrahl von $G$ die Parallele zu $g$ durch $B$ ist, und erhalten somit $\overline{G}$ als Schnittpunkt dieser Parallelen mit $v$.

**3)** Die Gerade $\overline{g}$ ist also die Verbindungsgerade von $I$ mit $\overline{G}$, und wir erhalten sofort die Schnittpunkte $\overline{P_1}$ und $\overline{P_2}$ von $\overline{g}$ mit $k$. Die entsprechenden Schnittpunkte $P_1$ bzw. $P_2$ sind dann die Schnittpunkte der jeweiligen Kollineationsstrahlen mit $g$, was die Konstruktion abschließt.




□

TANGENTENKONSTRUKTIONEN

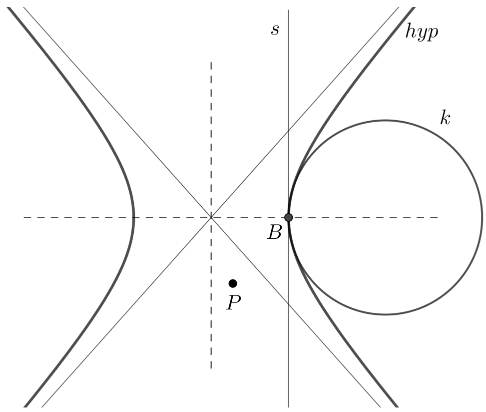
Jede Tangentenkonstruktion, die wir mit Hilfe einer Kollineation im Fall der Ellipse durchführen können, können wir auch mit Hilfe einer solchen Kollineation im Fall der Hyperbel analog durchführen.

Wollen wir, zum Beispiel, die Tangente einer Hyperbel konstruieren, die parallel zu einer bestimmten Geraden $g$ liegt, können wir das perspektiv kollineare Bild $\overline{G}$ vom Fernpunkt $G$ von $g$ bestimmen, die Tangenten an $k$ durch $\overline{G}$ konstruieren, und diese wieder mit Hilfe der Umkehrung der perspektiven Kollineation ins Hyperbelfeld überführen.

Im Folgenden wollen wir aber einen etwas allgemeineren Fall betrachten, nämlich die konstruktive Bestimmung der Tangenten einer Hyperbel durch einen vorgegebenen eigentlichen Punkt.

**Konstruktion 2** (Hyperbeltangenten durch Punkt)**.**

Gegeben ist die Hyperbel $hyp$ sowie der Punkt $P$. Konstruiere die Tangenten der Hyperbel, die durch den Punkt $P$ verläuft.

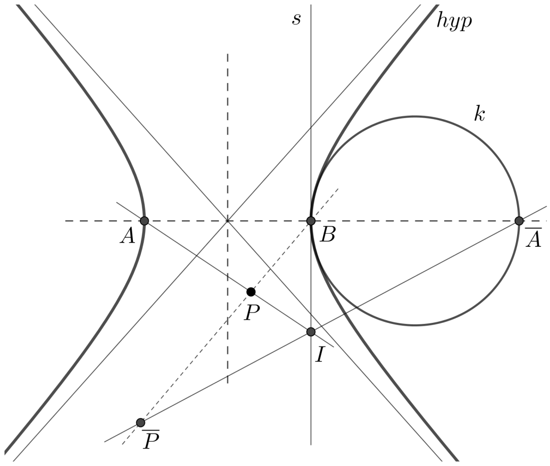



*Lösung.*

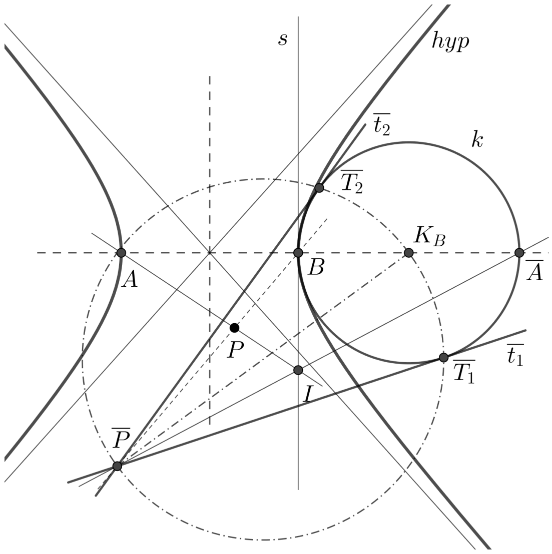
**1)** Da wir die perspektive Kollineation zwischen dieser Hyperbel und dem Hauptscheitelkrümmungskreis dabei verwenden wollen, ist dieser Krümmungskreis $k$ bereits eingezeichnet. Dieser berührt $hyp$ in $B$, womit $B$ auch das Kollineationszentrum $Z$ ist. Ferner ist die Scheiteltangente $s$ in $B$ bereits gezeichnet, die die Achse der Kollineation sein wird.

**2)** Nun konstruieren wir das kollineare Bild $\overline{P}$ von $P$ von $g$. Dieses liegt auf dem Kollineationsstrahl durch $P$.

**3)** Wir zeichnen zudem die Verbindungsgerade des zweiten Hyperbelscheitels $A$ mit $P$, und diese schneidet die Kollineationsachse im Fixpunkt $I$. Da $A$ durch die Kollineation auf den Punkt $\overline{A}$ abgebildet wird, der in $k$ dem Punkt $B$ diametral gegenüberliegt, erhalten wir das Bild der Geraden $PA = IA$ als Gerade $I\overline{A}$, und auf dieser liegt dann sicher der Bildpunkt $\overline{P}$. Wir erhalten somit $\overline{P}$ als Schnittpunkt dieser Bildgeraden mit dem Kollineationsstrahl durch $P$.

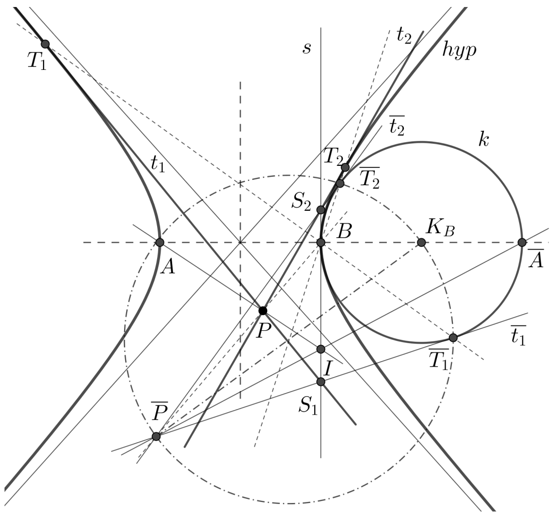



**4)** Als Nächstes konstruieren wir die Tangenten an $k$ durch $\overline{P}$. Zu diesem Zweck schneiden wir den Thaleskreis mit Durchmesser $\overline{P}K_B$ (wobei $K_B$ der Krümmungskreismittelpunkt, und somit der Mittelpunkt der Strecke $B\overline{A}$ ist) mit $k$, und erhalten die Berührpunkte $\overline{T_1}$ und $\overline{T_2}$ der Tangenten $\overline{t_1}$ bzw. $\overline{t_2}$.




**5)** Schließlich konstruieren wir die entsprechenden Tangenten an *hyp* zu den eben konstruierten Tangenten an $k$. Die Schnittpunkte $S_1$ und $S_2$ von $\overline{t_1}$ bzw. $\overline{t_2}$ mit $s$ sind Fixpunkte der Kollineation, und wir erhalten somit die Tangenten an *hyp* durch $P$ als $t_1 = PS_1$ und $t_2 = PS_2$.

**6)** Ihre Berührpunkte $T_1$ bzw. $T_2$ mit *hyp* erhalten wir schließlich als Schnittpunkte dieser Tangenten mit den Kollineationsstrahlen $B\overline{T_1}$ bzw. $B\overline{T_2}$.




Die Konstruktion ist somit abgeschlossen. □