GRUNDLAGENBLATT – KOLLINEATION ZWISCHEN PARABEL UND SCHEITELKRÜMMUNGSKREIS

Fragen & Antworten auf diesem Grundlagenblatt

- ✓ Wie ist die projektive Ebene definiert?
- ✓ Welche Eigenschaften hat eine perspektive Kollineation?
- ✓ Wie ist ein Fluchtpunkt charakterisiert?
- ✓ Wie kann man die Kollineation nutzen, um eine Parabel zu konstruieren?
- ✓ Wie kannst du mithilfe dieser Abbildung die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Parabel euklidisch konstruieren?
- ✓ Wie kannst du mithilfe eines Fernpunktes Tangenten an Parabel konstruieren?

Auf dem GB – Scheitelkrümmungskreis der Parabel haben wir Konstruktionen betrachtet, die von der perspektiv kollinearen Beziehung zwischen einer Ellipse und einem ihrer Scheitelkrümmungskreise abgeleitet werden können. Diese Idee wollen wir nun in diesem Abschnitt auch auf analoge Weise auf die Parabel anwenden.

DIE PROJEKTIVE EBENE

Projektive Ebene

Wir erinnern uns, dass wir die **projektive Ebene** dadurch definiert haben, dass wir die Punktmenge der euklidischen Ebene durch *Fernpunkte* erweitert haben, die wir als gemeinsame „Punkte“ paralleler (euklidischer) Geraden definieren. Die Menge aller Fernpunkte bildet dann die **Ferngerade**. Es gelten wieder sehr einfache Verknüfungsregeln.

1) Zwei verschiedene Punkte der projektiven Ebene haben immer genau eine gemeinsame Verbindungsgerade.

2) Zwei verschiedene Geraden der projektiven Ebene haben immer genau einen gemeinsamen Schnittpunkt.

Datum: 17. November 2022.

Die perspektive Kollineation

Perspektive Kollineation

In der projektiven Ebene können wir nun die **perspektive Kollineation** definieren. Dies ist eine bijektive, geradentreue Punktabbildung mit folgenden Eigenschaften.

1) Es existiert eine Gerade, die aus lauter Fixpunkten der Abbildung besteht, die *Kollineationsachse*.

2) Die Verbindungsgeraden aller Punkte P der Ebene mit ihren jeweiligen Bildpunkten $\overline{P}$ gehen durch einen gemeinsamen Punkt, dem *Kollineationszentrum*. Man bezeichnet diese Verbindungsgeraden als *Kollineationsstrahlen*.

Wie schon auf dem GB – Scheitelkrümmungskreis der Parabel verzichten wir an dieser Stelle auf eine exaktifizierende Begründung der Existenz derartger Abbildingen, zugunsten ihrer praktischen Anwendung.

Wir wissen auch schon vom GB – Scheitelkrümmungskreis der Parabel, dass Fernpunkte bei einer solchen Abbildung auf eigentliche Punkte abgebildet werden können und umgekehrt.

Fluchtpunkte

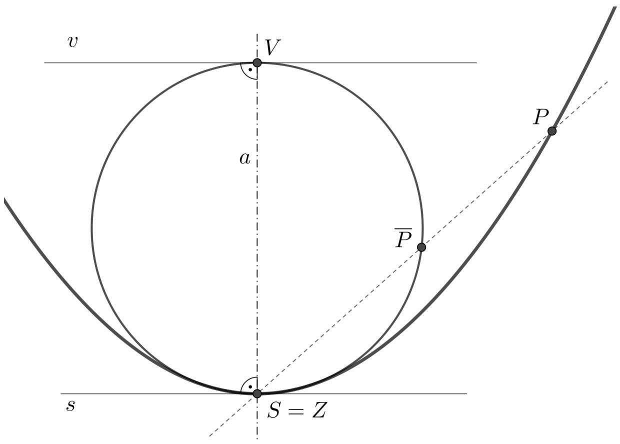
Punkte, die auf Fernpunkte abgebildet werden, bezeichnen wir als *Verschwindungspunkte*. Diese liegen auf der Geraden, die auf die Ferngerade abgebildet wird, der so-genannten *Verschwindungsgerade*. Bildpunkte von Fernpunkten bezeichnen wir als **Fluchtpunkte**. Diese liegen auf der Bildgeraden der Ferngerade, die wir als *Fluchtgerade* bezeichnen. Da der Fernpunkt der Kollineationsachse ein Fixpunkt der Abbildung ist, sind sowohl die Verschwindingsgerade als auch die Fluchtgerade sicher parallel zur Kollineationsachse.

Kollineare Abbildung eines Kreises auf einer Parabel

Auf dem GB – Scheitelkrümmungskreis der Parabel haben wir bereits festgestellt, dass das Bild eines Kreises bei einer perspektiven Kollineation eine Kurve zweiten Grades ist. Wählt man die Kollineation so, dass die Verschwindungsgerade eine Tangente des Kreises ist, wird der Kreis auf eine Parabel abgebildet. (Auf den Nachweis dieser Tatsache verzichten wir im Moment, aber analytische Behandlung derartiger Kollineationen, die den Rahmen dieser Ausführungen sprengen würden, ermöglichen den Nachweis.) Diese Tatsache ist gleichbedeutend damit, dass Parabeln genau die Kurven zweiten Grades sind, die die Ferngerade als Tangente haben.

Diese Ideen wollen wir nun für bestimmte Parabelonstruktionen ausnutzen. Zu diesem Zweck, betrachten wir die folgende Figur.

In dieser Figur sehen wir eine Parabel und ihren Scheitelkrümmungskreis dargestellt. Diese berühren einander im Scheitel S, und die gemeinsame Tangente in S ist die Scheiteltangente s. Wie wir es schon im Fall der Ellipse auf dem GB – Kollineation zu Scheitelkrümmungskreis kennen gelernt haben, stellt sich heraus, dass es eine perspektive Kollineation gibt, die den Scheitelkrümmungskreis auf die Parabel punktweise abbildet. Das Kollineationszentrum Z liegt dabei wieder im Berührscheitel S und die Kollineationsachse in der Scheiteltangente s in diesem Punkt. Die Figur soll wieder die Existenz einer solchen Abbildung plausibel machen.



Da der Kreis auf eine Parabel abgebildet werden soll, muss die Verschwindungsgerade v der Kollineation eine Tangente des Kreises sein, und da die Verschwindungsgerade parallel zur Kollineationsachse s liegen muss, ist v die diametral gegenüberliegende Tangente zu s. Der Berührpunkt der Verschwindungsgerade ist daher der zweite Schnittpunkt V der Parabelachse a mit dem Scheitelkrümmungskreis. Dieser Punkt V wird bei der Kollineation, die den Kreis auf die Parabel abbildet, auf den Fernpunkt von a abgebildet, und dies ist somit der „Berührpunkt" der Ferngeraden mit der Parabel. Bei dieser Abbildung wird auch der abgebildete Punkt $\overline{P}$ des Kreises auf den Punkt P der Parabel abgebildet, wobei $S = Z$, $\overline{P}$ und P auf einen gemeinsamen Kollineationsstrahl liegen.

Da die Kollineation bijektiv ist, kann man sie auch als Abbildung der Parabel auf den Kreis auffassen, und bei dieser Interpretation ist v die Fluchtgerade und P wird auf $\overline{P}$ abgebildet. Im Folgenden werden wir wieder je nach Bedarf von der Abbildung in der einen oder anderen Richtung sprechen.

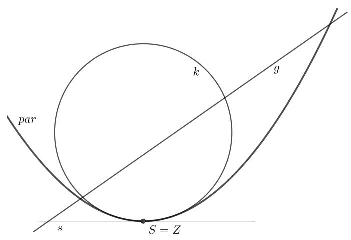
Schnitt einer Geraden mit einer Parabel

Nun sind wir bereit, konstruktive Anwendungen der perspektiven Kollineation zwischen einer Parabel und ihrem Scheitelkrümmungskreis durchzuführen.

Konstruktion 1 (Euklidische Konstruktion der Schnittpunkte von Parabel mit Gerade)**.** Gegeben ist eine Parabel par, sowie eine Gerade g. Konstruiere die Schnittpunkte von g mit par mit euklidischen Mitteln exakt.

Lösung.

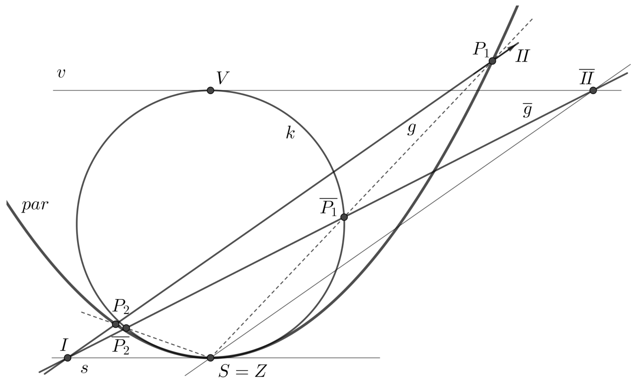
Zu diesem Zweck wollen wir die oben beschriebene perspektive Kollineation mit Achse s und Zentrum $Z = S$ ausnutzen, die die Parabel auf den Scheitelkrümmungskreis k abbildet. Dafür müssen wir die Bildgerade $\overline{g}$ von g bestimmen. Wenn wir diese Gerade kennen, kennen wir auch ihre Schnittpunkte $\overline{P_1}$ und $\overline{P_2}$ mit k, und somit auch auf den zugehörigen Kollineationsstrahlen die gesuchten Punkte P_1 bzw. P_2.



1) Um die Bildgerade $\overline{g}$ zu bestimmen, stellen wir zunächst fest, dass der Schnittpunkt I von g mit s ein Fixpunkt der Kollineation ist. Dieser Punkt liegt somit auch auf $\overline{g}$. Wir müssen also nur mehr einen einzigen weiteren Punkt von $\overline{g}$ bestimmen. Zu diesem Zweck betrachten wir den Fernpunkt II von g. Seinen Bildpunkt $\overline{II}$ liegt auf der Fluchtgerade v.

2) Wir wissen weiters, dass der Kollineationsstrahl von II die parallele zu g durch Z ist, und erhalten somit $\overline{II}$ als Schnittpunkt dieser Parallelen mit v.

3) Die Gerade $\overline{g}$ ist also die Verbindungsgerade von I mit $\overline{II}$, und wir erhalten sofort die Schnittpunkte $\overline{P_1}$ und $\overline{P_2}$ von $\overline{g}$ mit k. Die entsprechenden Schnittpunkte P_1 bzw. P_2 sind dann die Schnittpunkte der jeweiligen Kollineationsstrahlen mit g, was die Konstruktion abschließt.



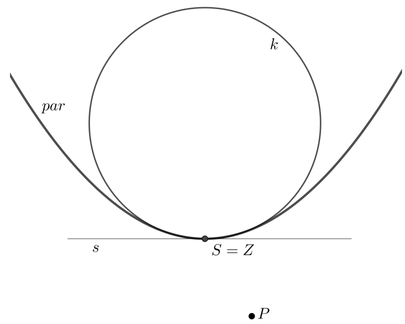
□

Jede Tangentenkonstruktion, die wir mit Hilfe einer Kollineation im Fall der Ellipse durchführen können, können wir auch mit Hilfe einer solchen Kollineation im Fall der Parabel analog durchführen. Wollen wir, zum Beispiel, die Tangente einer Parabel konstruieren, die parallel zu einer bestimmten Geraden g liegt, können wir das perspektiv kollineare Bild $\overline{G}$ vom Fernpunkt G von g bestimmen, die Tangente an k durch $\overline{G}$ konstruieren, die von der Fluchtgerade verschieden ist, und diese wieder mit Hilfe der Umkehrung der perspektiven Kollineation ins Parabelfeld übertragen.

Im Folgenden wollen wir aber einen etwas allgemeineren Fall betrachten, nämlich die konstruktive Bestimmung der Tangenten einer Parabel durch einen vorgegebenen eigentlichen Punkt.

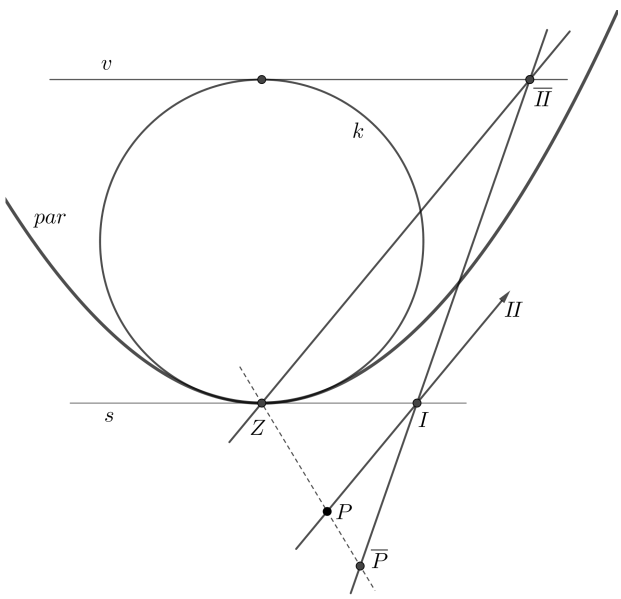
Konstruktion 2 (Parabeltangenten mittels Fernpunkt)**.**

Es seien die Parabel *par* gegeben, sowie der Punkt P, durch den wir die Parabeltangenten konstruieren wollen. Da wir die perspektive Kollineation zwischen dieser Ellipse und dem Hauptscheitelkrümmungskreis dabei verwenden wollen, ist dieser Krümmungskreis k bereits eingezeichnet. Dieser berührt *par* in S, womit S auch das Kollineationszentrum Z ist. Ferner ist die Scheiteltangente s in S bereits gezeichnet, die die Achse der Kollineation sein wird.

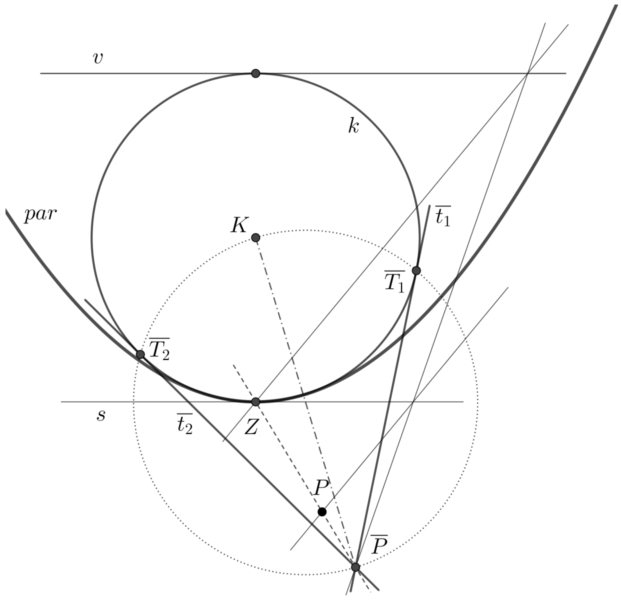


Lösung.

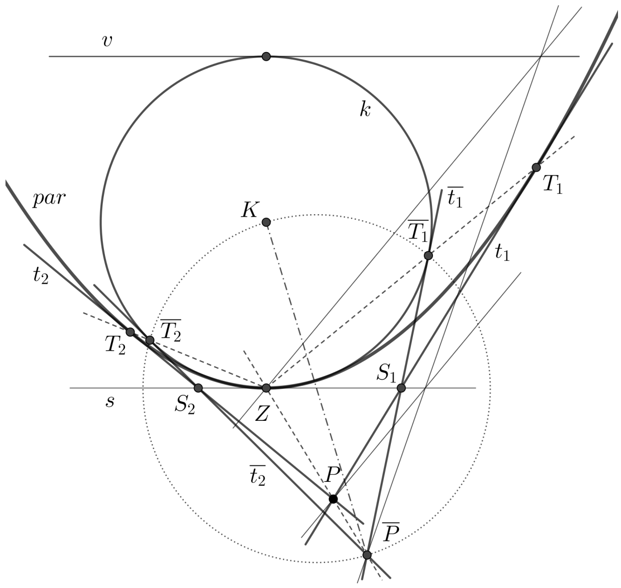
1) Nun konstruieren wir das kollineare Bild $\overline{P}$ von P von g. Dieses liegt auf dem Kollineationsstrahl durch P. Wählen wir dazu eine beliebige Gerade durch P, so schneidet diese Gerade die Kollineationsachse im Fixpunkt I. Weiters erhalten wir das kollineare Bild $\overline{II}$ vom Fernpunkt II dieser Geraden als Schnittpunkt der Parallelen zur Hilfsgerade durch Z mit der Fluchtgerade v. Das Bild dieser Hilfsgerade ergibt sich also als Verbindungsgerade von I mit $\overline{II}$, und $\overline{P}$ ist der Schnittpunkt dieser Bildgerade mit dem Kollineationsstrahl durch P.



2) Nun konstruieren wir als Nächstes die Tangenten an k durch $\overline{P}$. Zu diesem Zweck schneiden wir den Thaleskreis mit Durhmesser $\overline{P}K$ (wobei K der Krümmungskreismittelpunkt ist) mit k, und erhalten die Berührpunkte $\overline{T_1}$ und $\overline{T_2}$ der Tangenten $\overline{t_1}$ bzw. $\overline{t_2}$.



3) Nun konstruieren wir schließlich die entsprechenden Tangenten an *par* zu den eben konstruierten Tangenten an k. Die Schnittpunkte S_1 und S_2 von $\overline{t_1}$ bzw. $\overline{t_2}$ mit s sind Fixpunkte der Kollineation, und wir erlaten somit die Tangenten an *par* durch P als $t_1 = PS_1$ und $t_2 = PS_2$. Ihre Berührpunkte T_1 bzw. T_2 mit *par* erhalten wir schließlich als Schnittpunkte dieser Tangenten mit den Kollineationsstrahlen $Z\overline{T_1}$ bzw. $Z\overline{T_2}$, und die Konstruktion ist somit abgeschlossen.



□