GRUNDLAGENBLATT – KONJUGIERTE DURCHMESSER UND RYTZSCHE ACHSENKONSTRUKTION

Fragen & Antworten auf diesem Grundlagenblatt

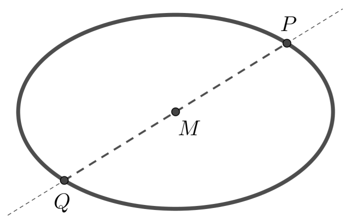
✓ Was bezeichnet man als **Durchmesser** einer Ellipse?
✓ Was versteht man unter konjugierten Durchmessern einer Ellipse?
✓ Wie konstruiert eine Ellipse mithilfe zweier konjugierter Durchmesser (**Rytzsche Achsenkonstruktion**)?

In diesem Abschnitt wollen wir uns etwas ausführlicher mit den *Durchmessern* einer Ellipse beschäftigen. Wie es auch beim Kreis bekannt ist, kann dieser Begriff je nach Kontext verschieden verwendet werden.

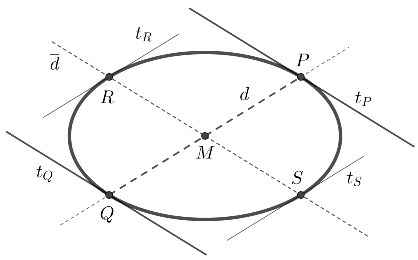
Durchmesser der Ellipse

Der **Durchmesser** einer Ellipse kann eine Gerade bezeichnen, die durch den Mittelpunkt der Ellipse geht, die Verbindungsstrecke der beiden Schnittpunkte P und Q dieser Geraden mit der Ellipse, oder die Länge der Strecke PQ.

Welche dieser Bedeutungen jeweils gemeint ist, geht üblicherweise unmissverständlich aus dem jeweiligen Kontext hervor.



In der Figur sind die Tangenten t_P und t_Q der Ellipse in den Punkten P bzw. Q eingezeichnet. Da die ganze Ellipse und auch die Strecke PQ symmetrisch bezüglich des Ellipsenmittelpunkts M liegt, geht die Ellipse punktweise in sich bei zentrischer Spiegelung an M über, wobei die beiden Punkte P und Q aufeinander abgebildet werden. Somit werden auch die Tangenten t_P und t_Q bei dieser Spiegelung aufeinander abgebildet.

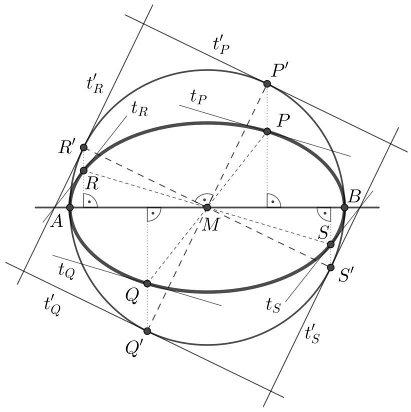


Da eine zentrische Spiegelung jede Gerade auf eine dazu parallele Gerade abbildet, sind die beiden Tangenten t_P und t_Q somit zueinander parallel.

In der Figur ist nun auch ein zweiter Durchmesser der Ellipse dargestellt, nämlich der zu den beiden Tangenten t_P und t_Q parallele Durchmesser $\overline{D} = RS$. Ferner sind auch die Tangenten t_R und t_S der Ellipse in R bzw. S dargestellt.

Datum: 17. November 2022.

Wie sich nun herausstellt, sind diese beiden Tangenten t_R und t_S auch parallel zum Ausgangsdurchmesser $d = PQ$. Dies sieht man mit Hilfe der Affinität der Ellipse zum Hauptscheitelkreis sofort ein, und dieser Zusammenhang ist in nebenstehender Figur zu sehen.

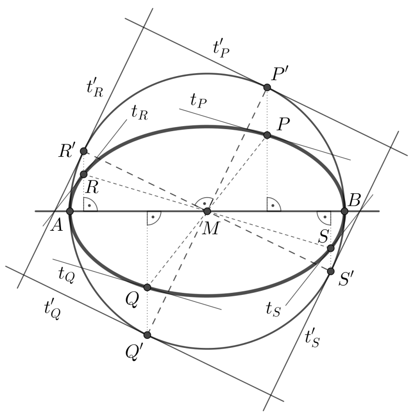


Die perspektive Affinität, die die Ellipse auf ihren Hauptscheitelkreis abbildet, bildet den Ellipsendurchmesser PQ auf den Kreisdurchmesser $P'Q'$ ab. Die Hauptscheitelkreistangenten t'_P und t'_Q sind die Bilder der Ellipsentangenten t_P und t_Q, und als Kreistangenten stehen sie normal zum Kreisdurchmesser $P'Q'$. Da wir den Ellipsendurchmesser RS zu t_P und t_Q parallel gewählt haben, ist auch sein Bild $R'S'$ parallel zu deren Bilder t'_P bzw. t'_Q, und somit ebenfalls normal zu $P'Q'$. Die Hauptscheitelkreistangenten t'_R und t'_S sind nun normal zu dieser Geraden, und somit parallel zu $P'Q'$. (Die vier Tangenten t'_P, t'_Q, t'_R und t'_S bilden ein Quadrat.) Da die perspektive Affinität parallelentreu ist, folgt aus der Tatsache, dass t'_R und t'_S parallel zu $P'Q'$ sind, auch, dass t_R und t_S wie behauptet parallel zu PQ sind.

Konjugierte Durchmesser

Wir bezeichnen PQ und RS als ein Paar *kongugierter Durchmesser* der Ellipse, da sie jede von ihnen parallel zu den Tangenten in den Endpunkten der anderen liegt. Man kann auch sagen, dass PQ *konjugiert* zu RS ist, bzw. umgekehrt. Diese Beziehung ist reflexiv, d.h. da sie in einer Richtung gilt, gilt sie zwangsläufig auch in der anderen.

Sehen wir uns die Figur noch einmal an. Wie wir sehen können, wird ein Paar konjugierter Ellipsendurchmesser durch die perspektive Affinität zum Hauptscheitelkreis auf eine Paar zueinander normaler Hauptscheitelkreisdurchmesser abgebildet.



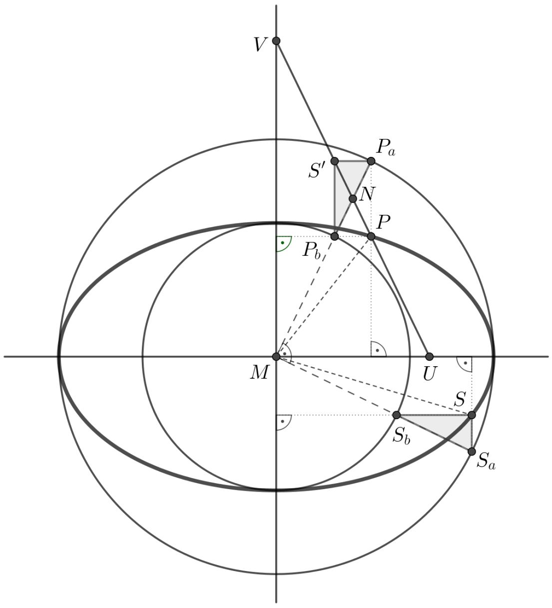
Aus dieser Tatsache ergibt sind nun eine sehr nützliche Konstruktion.

1) Wir sehen eine Ellipse mit dem Mittelpunkt M mit ihrem Hauptscheitelkreis und ihrem Nebenscheitelkreis dargestellt. Die beiden Punkte P und S der Ellipse seien die Endpunkte konjugierter Durchmesser PQ und RS der Ellipse.

2) Bei der Affinität zum Hauptscheitelkreis gehen P in P_a und S in S_a über, und dabei gilt, wie eben festgestellt, $MP_a \perp MS_a$.

3) Weiters gehen P und S bei der Affinität zum Nebenscheitelkreis in P_b bzw. S_b über.

Vom Nebenscheitelkreis haben wir auch schon bei der Ableitung der Konstruktion von de la Hire Gebrauch gemacht.



4) Dabei sind die Dreiecke PP_aP_b und SS_aS_b wegen der Orientierungen der Affinitätstrahlen rechtwinkelige Dreiecke mit Katheten parallel zu den Ellipsenachsen. Die Hypotenusenlängen beider Dreiecke sind darüber hinaus gleich $a - b$, da die Hypotenusen S_aS_b und P_aP_b jeweils auf einem gemeinsamen Radius der konzentrischen Scheitelkreise der Ellipse liegen.

5) Nun drehen wir das Dreieck SS_aS_b um $90°$ um M. Wegen $MS_a \perp MP_a$ geht dabei S_a in P_a über, S_b in P_b, und der Punkt S in einen Punkt, den wir als S' bezeichnen. Aufgrund der rechtwinkeligen Dreiecke PP_aP_b und SS_aS_b ist $PP_aS'P_b$ dann ein Rechteck mit Seiten parallel zu den Ellipsenachsen. Wir zeichnen die Diagonale PS' dieses Rechtecks, und bezeichnen den Mittelpunkt der Strecke PS' (also den Diagonalenschnittpunkt des Rechtecks) mit N. Außerdem bezeichnen wir die Schnittpunkte der Trägergeraden von PS' mit der Haupt- und Nebenachse der Ellipse als U bzw. V.

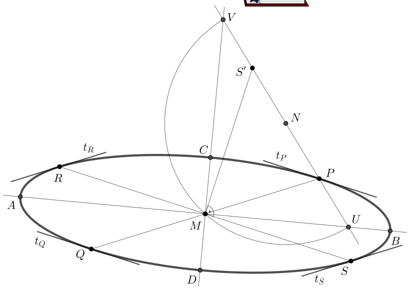
6) Da die Seiten des Rechtecks $PP_aS'P_b$ parallel zu den Ellipsenachsen liegen, sind die Dreiecke NMU, NP_bP, NMV und NP_bS' alle gleichschenkelig. Wir erhalten daher folgende Längengleichheiten:

$$NM = NU = NV, \quad PU = P_bM = S'V = b \quad \text{und} \quad S'U = P_aM = PV = a.$$

7) Es ist schließlich noch bemerkenswert festzuhalten, dass die Hauptachse MU der Ellipse im spitzen Winkelfeld der konjugierten Durchmesser liegt, und die Nebensachse im stumpfen Winkelfeld.

Rytzsche Achsenkonstruktion

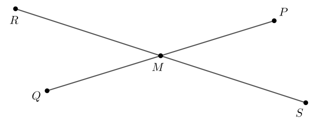
Daraus können wir also eine Vervollständigungskonstruktion ableiten, die besonders bei der euklidischen Konstruktion von Kreisbildern in Schrägrissen sehr hilfreich ist. Diese Konstruktion wird als *Rytzsche Achsenkonstruktion* bezeichnet, nach dem Schweizer Mathematiker David Rytz von Brugg (1801-1868).



Konstruktion 1 (Rytzsche Achsenkonstruktion)**.**

Die Strecken PQ und RS sind konjugierte Durchmesser einer Ellipse.

Der gemeinsame Mittelpunkt M der beiden Durchmesser ist der Mittelpunkt der Ellipse.

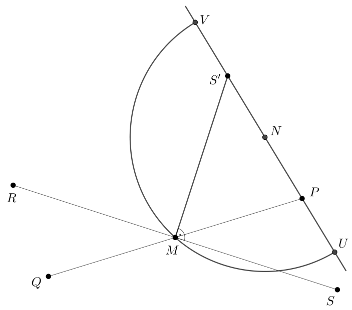


Konstruiere die beiden Achsen der Ellipse.

Lösung.

1) Drehen wir nun die Strecke MS um 90° um M, erhalten wir den Punkt S'.

2) Danach erhalten wir den Mittelpunkt N des Rechtecks als Mittelpunkt der Strecke PS' und die beiden Punkte U und V auf der Geraden PS' wegen $NM = NU = NV$ auf dem Kreis mit Mittelpunkt N durch M.

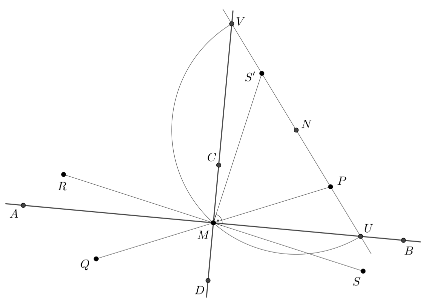


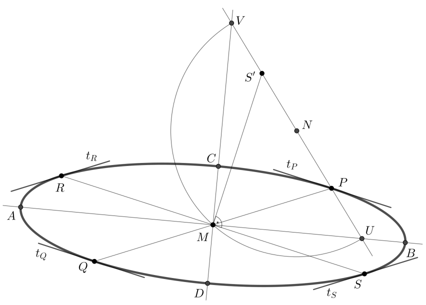
Nun wissen wir, dass die Gerade MU (im spitzen Winkelfeld der konjugierten Durchmesser PQ und RS) die Hauptachse der Ellipse ist, und MV die Nebenachse.

Wir bemerken, dass wir den rechten Winkel, den die beiden Achsen einschließen, sich auch aus dem Satz von Thales im Halbkreis mit dem Durchmesser UV bestätigt sehen.

3) Die Hauptscheitel A und B erhalten wir auf MU aufgrund der bekannten Beziehung $a = MA = MB = S'U = PV$ durch einfaches Abschlagen mit dem Zirkel.

4) Ebenso erhalten wir die Nebenscheitel C und D auf MV aufgrund von $b = MC = MD = PU = S'V$.





Hier sehen wir schließlich die fertige Ellipse. Zur Illustration der gegebenen konjugierten Durchmesser sind auch die Ellipsentangenten in den Punkte P, Q, R und S angedeutet, wobei t_P und t_Q parallel zu RS liegen und t_R und t_S parallel zu PQ. □