GRUNDLAGENBLATT – KONSTRUKTION VON DE LA HIRE

Fragen & Antworten auf diesem Grundlagenblatt

✓ Wie konstruiert man einen Punkt einer Ellipse mithilfe ihrer Scheitelkreise (**Konstruktion von de la Hire**)?
✓ Wie kann man die Gültigkeit dieser Konstruktion nachweisen?

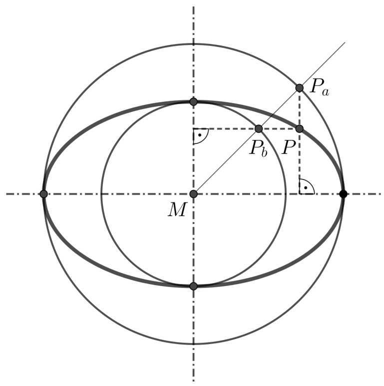
In diesem Abschnitt betrachten wir eine punktweise Konstruktion einer Ellipse unter Verwendung ihrer beiden Scheitelkreise.

Scheitelkreise der Ellipse

Eine Ellipse habe die Achsenlängen a und b. Die beiden Kreise mit demselben Mittelpunkt wie die Ellipse und Radien a bzw. b nennt man **Scheitelkreise**.

Konstruktion von de la Hire

Die folgende Konstruktion wird üblicherweise als *Konstruktion von de la Hire* bezeichnet, nach Philippe de La Hire (1640–1718). Die Konstruktion war aber schon in der Antike bekannt, und wird daher häufig auch als *Prokloskonstruktion* bezeichnet, nach Proklos Diadochos (412–485).

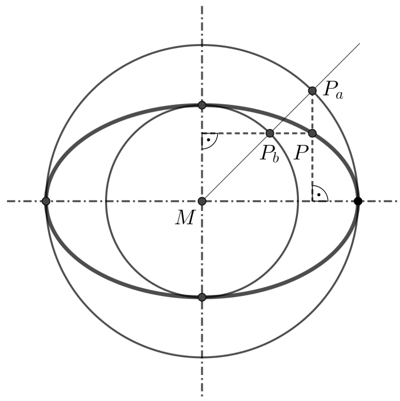


Datum: 17. November 2022.

Konstruktion 1 (Konstruktion von de la Hire)**.** Gegeben sind die Achsenlängen a und b einer Ellipse mit Mittelpunkt M. Konstruiere die Ellipse punktweise unter Verwendung ihrer beiden Scheitelkreise.

Lösung.

1) Wir sehen hier eine Ellipse mit Mittelpunkt M, sowie ihren Hauptscheitelkreis mit Mittelpunkt M und Radius a und ihren Nebenscheitelkreis mit Mittelpunkt M und Radius b. Zeichnet man einen beliebigen gemeinsamen Radius dieser beiden Kreise, so schneidet dieser den Hauptscheitelkreis in P_a und den Nebenscheitelkreis in P_b.



2) Die Normale zur Ellipsenhauptachse durch P_a schneidet dann die Normale zur Ellipsennebenachse durch P_b in einem Punkt P der Ellipse.

Die Gültigkeit dieser Konstruktion folgt aus der normalen perspektiven Affinität.
Auf dem Grundlagenblatt–Affinität zum Hauptscheitelkreis haben wir die perspektive Affinität so definiert, dass wir jeden Punkt $P(x_P/y_P)$ auf einen Punkt $\overline{P}(x_P/c \cdot y_P)$ abgebildet haben, mit $0 < c < 1$. Wir haben uns auch überlegt, dass diese Abbildung die Punkte eines Kreises mit der Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$ auf die Punkte einer Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ abbildet, mit $b = c \cdot a$.

Umkehrabbildung

Da diese Abbildung bijektiv ist, können wir auch sagen, dass die Umkehrung dieser Abbildung, also der Abbildung, die einen Punkt $P(x_P/y_P)$ auf den Punkt $P_a(x_P/\frac{1}{c} \cdot y_P) = (x_P/\frac{a}{b} \cdot y_P)$ abbildet, jeden Punkt der Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ auf einen Punkt des Kreises $x^2 + y^2 = a^2$ abbildet.

Nun können wir vollkommen analog eine normale perspektive Affinität definieren, die jeden Punkt $P(x_P/y_P)$ auf einen Punkt $\overline{P}(c \cdot x_P/y_P)$ abbildet. Mit analogen Rechnungen erkennen wir, dass diese Abbildung bei Wahl von $c = \frac{b}{a}$ die Punkte P der Ellipse auf Punkte des Kreises $x^2+y^2 = b^2$ abbildet.
Die erstgenannte Affinität hat Affinitätsstrahlen normal zur Ellipsenhauptachse, und diese zweitgenannte hat ebensolche normal zur Ellipsennebenachse, da sie die Punkte $P(x_P/y_P)$ und $P_b(\frac{b}{a} \cdot x_P/y_P)$ mit gleicher y-Koordinate verbinden.
Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass die Punkte P_a und P_b auf einer gemeinsamen Geraden durch den Koordinatenursprung liegen. Dies ist aber offensichtlich, da sowohl der Punkt $P_a(x_P/\frac{a}{b} \cdot y_P)$ als auch der Punkt $P_b(\frac{b}{a} \cdot x_P/y_P)$ auf der Geraden mit der Gleichung $y = \frac{a}{b} \cdot x$ liegen. Die Gültigkeit der Konstruktion ist somit gezeigt. □