

GRUNDLAGENBLATT – KREISTANGENTEN

Fragen & Antworten auf diesem Grundlagenblatt



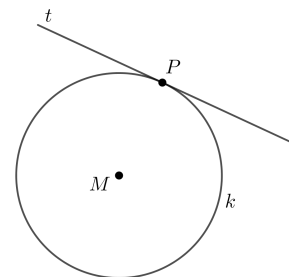
- ✓ Wie ist die **Tangente** an einen Kreis definiert?
- ✓ Wie kann man sich eine Tangente bildlich vorstellen?
- ✓ Welchen Winkel schließt der Radius mit der Tangente ein?
- ✓ Wieso sind die Tangentenstrecken gleich lang?

In diesem Abschnitt werden wir den Begriff der Kreistangente präzise definieren und ein paar wichtige Eigenschaften von Kreistangenten ableiten. Dazu benötigen wir zuerst eine genaue Definition der Kreistangente.

Definition: Tangente und Berührungspunkt

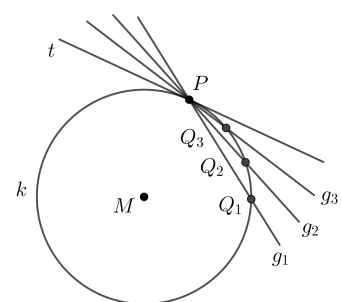


Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r . Eine Gerade t bezeichnen wir als *Tangente* von k , wenn es *genau einen* Punkt P gibt, der sowohl auf k als auch auf t liegt. Den Punkt P bezeichnen wir in diesem Fall als *Berührungspunkt* von t mit k .



Eine Möglichkeit, sich diese Definition bildlich vorzustellen, die sich in vielen Zusammenhängen als sehr hilfreich erweist, ist folgende.

In dieser Figur ist P ein fix vorgegebener Punkt von k . Wir wählen einen zweiten, beliebigen, Punkt Q_1 von k und denken uns die Verbindungsgerade g_1 der beiden Punkte P und Q_1 . (Dies ist die *Sekante* PQ_1 von k .) In Gedanken rücken wir nun den Punkt Q_1 längs des Kreises k näher an P heran, und erhalten als neue Lage den Punkt Q_2 und als neue Verbindungsgerade die Sekante $PQ_2 = g_2$. Diesen Prozess wiederholen wir, und erhalten den Punkt Q_3 und die Gerade $PQ_3 = g_3$, und so fort für weitere Punkte Q_i und Geraden $PQ_i = g_i$ mit $i = 4, 5, 6, \dots$



Datum: 17. November 2022.

Wir können uns nun einen Grenzübergang vorstellen, nach dem die Lage von Q_i mit P zusammenfällt. Nach diesem Grenzübergang erhalten wir als Lage der Geraden g_i die Tangente t , die nur mehr den eindeutigen Punkt P mit k gemeinsam hat, da die beiden gemeinsamen Punkte der g_i mit k nach diesem Übergang zusammenfallen.

Eine besonders bemerkenswerte Eigenschaft der Kreistangente ist die folgende.

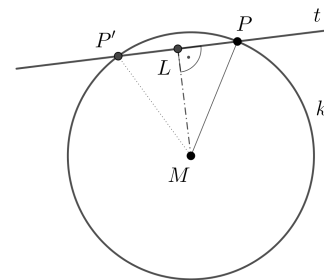
Kreistangente & Rechter Winkel



Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und ein Punkt P auf k .
 Es sei t die Tangente von k in P .
 Dann steht die Strecke MP normal zu t .

Beweis. Nehmen wir an, MP wäre nicht normal zu t .

In diesem Fall existiert eine Gerade durch M , die normal zu t steht und nicht durch P geht. Diese schneidet also t im Lotfußpunkt $L \neq P$. Nun betrachten wir das rechtwinkelige Dreieck MLP . Die Hypotenuse PM in diesem Dreieck ist sicher länger als die Kathete ML , und der Punkt L befindet sich somit sicher im Inneren von k . Spiegeln wir den Punkt P an der Geraden ML , erhalten wir einen Punkt P' , der sicher von P verschieden ist, und dessen Abstand zu M gleich groß ist wie der Abstand von P zu M , also gleich dem Kreisradius.



Dieser Punkt P' liegt somit sowohl auf der Geraden t als auch auf dem Kreis k . Wegen $P' \neq P$ kann aber in diesem Fall t nicht eine Tangente von k sein, im Widerspruch zur Annahme. Wir sehen also, dass MP jedenfalls normal zu t stehen muss. □

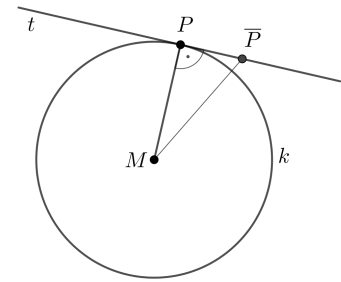
Kreistangente & Rechter Winkel – Umkehrung



Auch die Umkehrung dieses Satzes ist richtig:
 Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und ein Punkt P auf k .
 Es sei t die Gerade durch P , die normal zu MP steht.
 Dann ist t die Tangente von k in P .

Beweis. Um die Gültigkeit dieser Behauptung zu erkennen, betrachten wir einen beliebigen Punkt $\bar{P} \neq P$ auf t .

Im Dreieck $P\bar{P}M$ ist $M\bar{P}$ die Hypotenuse, und daher sicher länger als die Kathete PM . Der Abstand von \bar{P} zu M ist somit größer als der Kreisradius, und \bar{P} liegt somit sicher außerhalb von k . Auf der Geraden t kann also unter den gegebenen Voraussetzungen außer P kein weiterer Punkt von k liegen, und t ist somit, wie behauptet, sicher die Tangente von k in P .

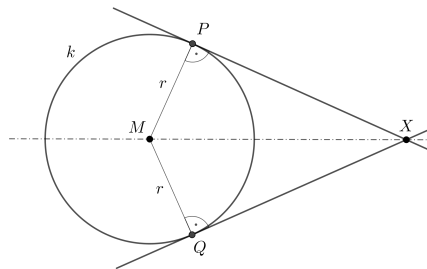


□

Eine Eigenschaft der Kreistangenten, die wir in weiterer Folge noch oft anwenden werden, ist nun die folgende.

Tangentenstrecken  **MmF**

Gegeben seien ein Kreis k mit Mittelpunkt M und dem Radius r und ein Punkt X außerhalb von k . Die beiden Punkte P und Q liegen so k , dass die Geraden XP und XQ Tangenten von k sind. Dann sind die Strecken XP und XQ gleich lang.



Da es sich hier um eine besonders lehrreiche Situation handelt, betrachten wir drei verschiedene Beweise für diese Behauptung.

Beweis 1. Spiegelt man einen Kreis an einem beliebigen Durchmesser des Kreises (also an einer Gerade durch den Mittelpunkt M), wird jeder Punkt des Kreises auf einen Punkt des Kreises abgebildet, da der Abstand zu M bei einer solchen Spiegelung sicher gleich bleibt. Der Kreis ist also symmetrisch bezüglich des Durchmessers. Dies gilt im vorliegenden Fall für den Durchmesser XM . Da der Punkt X auf der Spiegelachse liegt, bleibt dieser Punkt bei der Spiegelung ebenso wie M unverändert, und da der Kreis unverändert bleibt, muss eine Tangente von k durch X wieder auf eine Tangente abgebildet werden, da der eindeutige gemeinsame Punkt dieser Tangente mit k auf einen ebensolchen eindeutigen gemeinsamen Punkt mit der gespiegelten Geraden abgebildet wird. Die Tangente XP wird also durch die Spiegelung an XM auf die Tangente XQ abgebildet, und die Strecken XP und XQ sind somit, wie behauptet, sicher gleich lang, da Streckenlängen durch Spiegelungen immer unverändert bleiben.

□

Beweis 2. Wir betrachten die beiden Dreiecke PXM und QXM . Da die beiden Kreisradien MP und MQ zu den Tangenten XP bzw. XQ normal stehen, gilt $\angle MPX = \angle XQM = 90^\circ$. Die Strecke XM liegt in beiden Dreiecken diesem rechten Winkel gegenüber, und die Dreiecke stimmen also auch in ihren Hypotenusenlängen überein. Weiters gilt $MP = MQ = r$, und wir sehen, dass die beiden Dreiecke PXM und QXM nach SSW kongruent sind. Somit folgt auch, wie behauptet, $XP = XQ$. \square

Beweis 3. Wie im vorherigen Beweis betrachten wir die beiden Dreiecke PXM und QXM . Da $\angle MPX = 90^\circ$ gilt, sowie $MP = r$, erhalten wir nach dem Pythagoreischen Lehrsatz im Dreieck PXM

$$PX^2 = MX^2 - MP^2 = MX^2 - r^2.$$

Allerdings gilt auch wegen $\angle MQX = 90^\circ$ und $MQ = r$ nach dem Pythagoreischen Lehrsatz im Dreieck QXM

$$QX^2 = MX^2 - MQ^2 = MX^2 - r^2.$$

Wiederum erhalten wir also, wie behauptet, dass $XP = XQ$ gelten muss. \square