GRUNDLAGENBLATT – LEITLINIENDEFINITION ALLGEMEINER KEGELSCHNITTE

In diesem Abschnitt untersuchen wir eine alternative Definition eines Kegelschnitts.

Leitliniendefinition

Gegeben seien ein Punkt F (der *Brennpunkt*), eine Gerade ℓ (die *Leitlinie*, mit $F \notin \ell$) und eine positive reelle Zahl ε (die *numerische Exzentrizität*). Wir betrachten die Menge

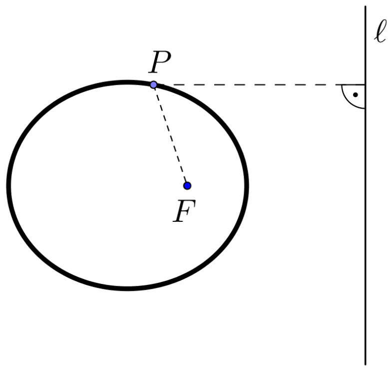
$$\{P\,;\ PF = \varepsilon \cdot P\ell\}.$$

Im Fall $\varepsilon = 1$ eine Parabel.
Im Fall $0 < \varepsilon < 1$ die Menge aller Punkte eine Ellipse.
Im Fall $\varepsilon > 1$ die Menge aller Punkte eine Hyperbel.

Im Fall $\varepsilon = 1$ erkennen wir hier genau die Parabelbrennpunktsdefinition vom GB – Parabeldefinition.

Beweis. Wir wollen nun zeigen, dass diese Menge für $0 < \varepsilon < 1$ die Menge aller Punkte einer Ellipse ist.

In dieser Figur wurde der spezielle Wert $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gewählt. Nehmen wir also an, dass der abgebildete Punkt P ein Punkt der betrachteten Menge ist, so ist die Strecke PF genau halb so lang wie der Normalabstand von P zu ℓ.



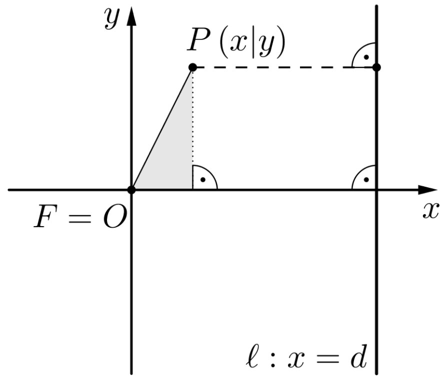
Nun wollen wir nachweisen, dass die Menge aller Punkte, die der Leitliniendefinition unter der Voraussetzung genügen, dass $0 < \varepsilon < 1$ gilt, genau die Lösungen einer Ellipsengleichung der Gestalt

$$\frac{1}{a^2} \cdot (x-m)^2 + \frac{1}{b^2} \cdot (y-n)^2 = 1$$

sind.

Datum: 17. November 2022.

In dieser Figur haben wir den Punkt F in den Ursprung einer kartesischen Koordinatensystems gelegt. Darüber hinaus haben wir angenommen, dass die Leitlinie ℓ die Gleichung $x = d$ mit $d > 0$ hat, womit ℓ rechts des Ursprungs normal zur x-Achse liegt.



Für die Koordinaten eines beliebigen Punkts $P(x|y)$, der der Leitliniendefinition genügt, erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
& PF = \varepsilon \cdot P\ell \\
\iff & \sqrt{x^2+y^2} = \varepsilon \cdot (d-x) \\
\iff & x^2+y^2 = \varepsilon^2 d^2 - 2\varepsilon dx + \varepsilon^2 x^2 \\
\iff & (1-\varepsilon^2)x^2 + 2\varepsilon^2 dx + y^2 = \varepsilon^2 d^2 \\
\iff & x^2 + \frac{2\varepsilon^2 d}{1-\varepsilon^2}\cdot x + \frac{1}{1-\varepsilon^2}\cdot y^2 = \frac{\varepsilon^2 d^2}{1-\varepsilon^2} \\
\iff & x^2 + \frac{2\varepsilon^2 d}{1-\varepsilon^2}\cdot x + \frac{\varepsilon^4 d^2}{(1-\varepsilon^2)^2} + \frac{1}{1-\varepsilon^2}\cdot y^2 = \frac{\varepsilon^2 d^2}{1-\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^4 d^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \\
\iff & \left(x + \frac{\varepsilon^2 d}{1-\varepsilon^2}\right)^2 + \frac{1}{1-\varepsilon^2}\cdot y^2 = \frac{\varepsilon^2 d^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \\
\iff & \frac{1}{\frac{\varepsilon^2 d^2}{(1-\varepsilon^2)^2}}\left(x + \frac{\varepsilon^2 d}{1-\varepsilon^2}\right)^2 + \frac{1}{\frac{\varepsilon^2 d^2}{1-\varepsilon^2}}\cdot y^2 = 1
\end{aligned}$$

Dies ist genau eine Ellipsengleichung der erwünschten Art.

Wir erhalten als Mittelpunkt der Ellipse

$$M\left(-\frac{\varepsilon^2 d}{1-\varepsilon^2} \mid 0\right)$$

und es gilt für die Achsenlängen

$$a^2 = \frac{\varepsilon^2 d^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \quad \text{und} \quad b^2 = \frac{\varepsilon^2 d^2}{1-\varepsilon^2}.$$

Aus diesen Tatsachen können wir nunmehr unmittelbar eine bemerkenswerte Beziehung ableiten. Wegen

$$e^2 = a^2 - b^2 = \frac{\varepsilon^2 d^2}{(1-\varepsilon^2)^2} - \frac{\varepsilon^2 d^2}{1-\varepsilon^2} = \frac{\varepsilon^4 d^2}{(1-\varepsilon^2)^2}$$

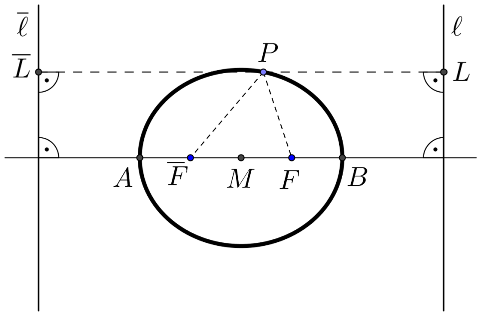
erhalten wir nämlich

$$\frac{e}{a} = \frac{\frac{\varepsilon^2 d}{1-\varepsilon^2}}{\frac{\varepsilon d}{1-\varepsilon^2}} = \varepsilon.$$

Darüber hinaus können wir auch unschwer eine interessante Aussage über die relative Lage von M und ℓ treffen.

Da die Nebenachse der Ellipse eine Symmetrieachse der Ellipse ist, gibt es neben dem Paar F und ℓ ein zweites symmetrisches Paar $\overline{F}$ und $\overline{\ell}$ von Brennpunkt und Leitlinie, das dieselbe Kurve mit derselben Exzentrizität ε erzeugt.

In dieser Figur seien A und B die Hauptscheitel der Ellipse, M der Mittelpunkt und F und ℓ bzw. $\overline{F}$ und $\overline{\ell}$ die erzeugenden Paare von Brennpunkten und Leitlinien. Es ist P ein beliebiger Ellipsenpunkt und weiters ist der Lotfußpunkt von P auf ℓ als L und der von P auf $\overline{\ell}$ als $\overline{L}$ definiert.



Da P ein Element der Punktmenge ist, ist dies gleichwertig damit, dass

$$PF = \varepsilon \cdot P\ell = PL$$

gilt, aber, wie wir eben festgestellt haben, ist es auch damit gleichwertig, dass

$$P\overline{F} = \varepsilon \cdot P\overline{\ell} = P\overline{L}$$

gilt. Dies bedeutet, dass

$$PF + P\overline{F} = \varepsilon \cdot (PL + P\overline{L}) = \varepsilon \cdot L\overline{L}$$

gilt. Da die Länge der Strecke $L\overline{L}$ als Abstand der beiden parallelen Geraden ℓ und $\overline{\ell}$ konstant ist, ist es auch das ε-Fache, und die Summe der Abstände aller Punkte der betrachteten Menge zu F und zu $\overline{F}$ ist somit konstant. Dies ist aber genau die Brennpunktsdefinition der Ellipse mit Brennpunkten F und $\overline{F}$ und Hauptachsenlänge $\varepsilon \cdot \ell\overline{\ell}$. Wir sehen also, dass die beiden Punkte F und $\overline{F}$ auch die Brennpunkte für die bekannte Brennpunktsdefinition sind.

Da AB die Schnittstrecke der Hauptachse $F\overline{F}$ mit der Ellipse ist, erhalten wir damit auch

$$AB = \varepsilon \cdot \ell\overline{\ell}$$

als Hauptachsenlänge. Da M der Mittelpunkt der Strecke AB ist, und aufgrund der Symmetrie gleich weit von ℓ und $\overline{\ell}$, sehen wir damit, dass auch

$$a = \varepsilon \cdot M\ell$$

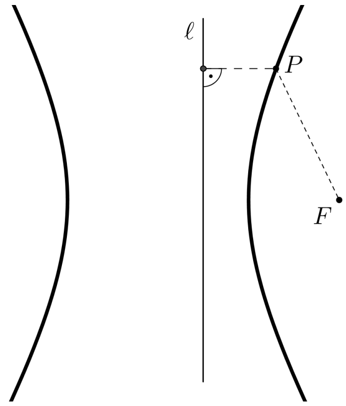
gilt. Zusammengefasst erhalten wir also auch den Wert von d als

$$d = F\ell = M\ell - MF = M\ell - e = \frac{a}{\varepsilon} - a \cdot \varepsilon.$$

$\square$

Beweis. Nun können wir analog den Fall für $\varepsilon > 1$ die Menge aller Punkte einer Hyperbel betrachten.

In dieser Figur wurde der spezielle Wert $\varepsilon = 2$ gewählt. Nehmen wir also an, dass der abgebildete Punkt P ein Punkt der betrachteten Menge ist, so ist die Strecke PF genau doppelt so lang wie der Normalabstand von P zu ℓ.



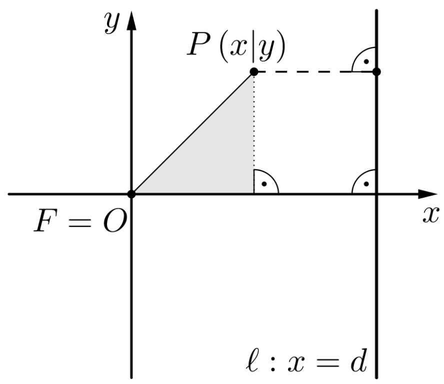
Wir wollen in diesem Fall nachweisen, dass die Menge aller Punkte, die der Leitliniendefinition unter der Voraussetzung genügen, dass $\varepsilon > 1$ gilt, genau die Lösungen einer Hyperbelgleichung der Gestalt

$$\frac{1}{a^2} \cdot (x-m)^2 - \frac{1}{b^2} \cdot (y-n)^2 = 1$$

sind.

In dieser Figur haben wir wieder den Punkt F in den Ursprung einer kartesischen Koordinatensystems gelegt.

Die Bezeichnungen und Lagen sind gleich wie im Fall der Ellipse erstes Bild.



Für die Koordinaten eines beliebigen Punkts $P(x|y)$, der der Leitliniendefinition genügt, erhalten wir dann wieder

$$\begin{aligned} & PF = \varepsilon \cdot P\ell \\ \iff & \frac{1}{\frac{\varepsilon^2 d^2}{(1-\varepsilon^2)^2}} \left(x + \frac{\varepsilon^2 d}{1-\varepsilon^2} \right)^2 + \frac{1}{\frac{\varepsilon^2 d^2}{1-\varepsilon^2}} \cdot y^2 = 1 \end{aligned}$$

Da wir aber in diesem Fall $\varepsilon > 1$ voraussetzen, gilt $1 - \varepsilon^2 < 0$, und wir schreiben die Gleichung besser als

$$\frac{1}{\frac{\varepsilon^2 d^2}{(\varepsilon^2-1)^2}} \left(x - \frac{\varepsilon^2 d}{\varepsilon^2 - 1} \right)^2 - \frac{1}{\frac{\varepsilon^2 d^2}{\varepsilon^2-1}} \cdot y^2 = 1$$

Dies ist genau eine Hyperbelgleichung der erwünschten Art.

Wir erhalten als Mittelpunkt der Hyperbel

$$M \left(\frac{\varepsilon^2 d}{\varepsilon^2 - 1} \mid 0 \right)$$

und es gilt für die Achsenlängen

$$a^2 = \frac{\varepsilon^2 d^2}{(\varepsilon^2 - 1)^2} \quad \text{und} \quad b^2 = \frac{\varepsilon^2 d^2}{\varepsilon^2 - 1}.$$

Wie im Ellipsenfall können wir daraus unmittelbar ableiten, dass

$$e^2 = a^2 + b^2 = \frac{\varepsilon^2 d^2}{(\varepsilon^2 - 1)^2} + \frac{\varepsilon^2 d^2}{\varepsilon^2 - 1} = \frac{\varepsilon^4 d^2}{(\varepsilon^2 - 1)^2}$$

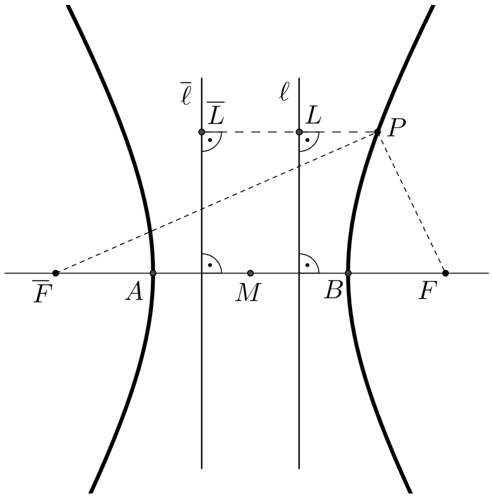
gilt, und neuerlich erhalten wir

$$\frac{e}{a} = \frac{\frac{\varepsilon^2 d}{\varepsilon^2 - 1}}{\frac{\varepsilon d}{\varepsilon^2 - 1}} = \varepsilon.$$

Wir erhalten hier auch die analoge Aussage über die relative Lage von M und ℓ zu jener im Ellipsenfall.

Wie schon bei der Ellipse, gibt es aufgrund der Symmetrie bezüglich der Nebenachse neben dem Paar F und ℓ ein zweites symmetrisches Paar $\overline{F}$ und $\overline{\ell}$ von Brennpunkt und Leitlinie, das dieselbe Kurve mit derselben Exzentrizität ε erzeugt.

In dieser Figur seien A und B die Hauptscheitel, M der Mittelpunkt und F und ℓ bzw. $\overline{F}$ und $\overline{\ell}$ die erzeugenden Paare von Brennpunkten und Leitlinien. Weiters ist P wieder ein beliebiger Kurvenpunkt und wir definieren wieder den Lotfußpunkt von P auf ℓ als L und den von P auf $\overline{\ell}$ als $\overline{L}$. Wie im Fall der Ellipse zweites Bild.



Analog zum Fall der Ellipse erhalten wir

$$PF = \varepsilon \cdot P\ell = PL$$

und

$$P\overline{F} = \varepsilon \cdot P\overline{\ell} = P\overline{L}$$

und somit

$$|PF - P\overline{F}| = \varepsilon \cdot (|PL - P\overline{L}|) = \varepsilon \cdot L\overline{L}.$$

Da die Länge der Strecke $L\overline{L}$ als Abstand der beiden parallelen Geraden ℓ und $\overline{\ell}$ konstant ist, ist es auch das ε-Fache, und die Differenz der Abstände aller Punkte der betrachteten Menge zu F und zu $\overline{F}$ ist somit konstant. Dies ist aber genau die Brennpunktsdefinition der Hyperbel mit Brennpunkten F und $\overline{F}$ und Hauptachsenlänge $\varepsilon \cdot \ell\overline{\ell}$. Wir sehen also, dass die beiden Punkte F und $\overline{F}$ auch hier wieder die Brennpunkte für die bekannte Brennpunktsdefinition sind.

Da AB die Schnittstrecke der Hauptachse $F\overline{F}$ mit der Hyperbel ist, erhalten wir damit auch in diesem Fall

$$AB = \varepsilon \cdot \ell\overline{\ell}$$

als Hauptachsenlänge. Da M der Mittelpunkt der Strecke AB ist, und aufgrund der Symmetrie gleich weit von ℓ und $\overline{\ell}$, sehen wir damit, dass auch

$$a = \varepsilon \cdot M\ell$$

gilt. Zusammengefasst erhalten wir also auch den Wert von d als

$$d = F\ell = M\ell + MF = M\ell + e = \frac{a}{\varepsilon} + a \cdot \varepsilon.$$

□

Nun, da wir diese theoretischen Betrachtungen so weit abgeschlossen haben, betrachten wir noch punktweise Konstruktionen von Ellipse und Hyperbel, die sich aus dieser Definition ergeben.

Konstruktion 1. Konstruiere punktweise eine Ellipse mit gegebenem Brennpunkt F, Leitlinie ℓ und speziellem Wert $\varepsilon = \frac{2}{3}$.

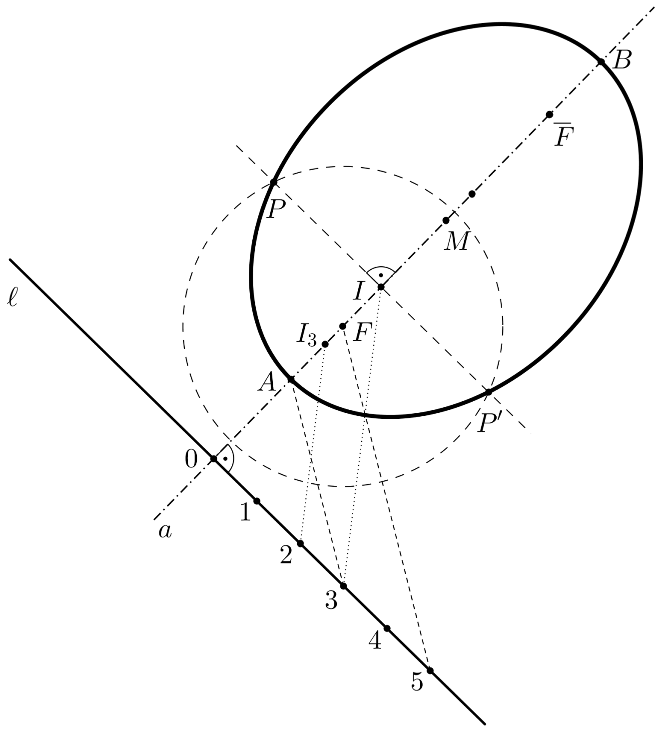
Lösung.

1) Zuerst stellen wir uns vor, es sei die Normale a zu ℓ durch F konstruiert. Diese Gerade a ist, aufgrund der bereits angeleiteten Symmetrie, die Hauptachse der Ellipse. Auf ihr liegen daher die Hauptscheitel A und B der Ellipse.

2) Um den Punkt A zwischen F und ℓ konstruktiv zu erhalten, für den $AF = \frac{2}{3} \cdot A\ell$ gilt, gehen wir in der Figur folgendermaßen vor. Wir bezeichnen den Schnittpunkt von a und ℓ als 0 und markieren auf ℓ Punkte $1, 2, 3, 4$ und 5 mit $01 = 12 = 23 = 34 = 45$. Die Parallele zu $5F$ durch 3 schneidet dann a wie erwünscht im Punkt A, für den aufgrund des Strahlensatzes

$$A\ell : AF = A0 : AF = 30 : 35 = 1 : \frac{2}{3}$$

gilt.



3) Den zweiten Scheitel B erhalten wir, indem wir die Strecke der Länge $F0$ noch zwei Mal auf a von F mit dem Zirkel abschlagen. Dann gilt sicher für den resultierenden Punkt B wie erwünscht

$$B\ell : BF = B0 : BF = 3 : 2 = 1 : \frac{2}{3}$$

4) Schließlich wollen wir noch einen allgemeinen Punkt der Kurve konstruieren. Zu diesem Zweck wählen wir einen beliebigen Punkt I auf a zwischen A und B und zeichnen die Normale zu a durch diesen Punkt I. Alle Punkte auf dieser Geraden haben denselben Abstand $I0$ von ℓ.

5) Die Ellipsenpunkte auf dieser Geraden haben von F einen Abstand, der $\frac{2}{3}$ so groß ist. Wir müssen also $\frac{2}{3}$ dieser Streckenlänge mit den Zirkel von F abschlagen. Wir erhalten $\frac{2}{3}$ der Streckenlänge wieder mit Hilfe des Strahlensatzes.

6) Zeichnen wir die Parallele zum Punkt 2 durch $3I$, so schneidet diese die Achse a im Punkt I_3 mit der Eigenschaft

$$0I_3 : 0I = 02 : 03 = \frac{2}{3} : 1.$$

7) Die Schnittpunkte P und P' der Normalen zu a durch I mit dem Kreis mit Mittelpunkt F und Radius OI_3 sind somit zwei allgemeine Punkte der Ellipse. Da wir I auf der Strecke AB beliebig wählen können, haben wir somit eine Möglichkeit, beliebig viele Ellipsenpunkte auf diese Art zu konstruieren.

□

Konstruktion 2. Konstruiere punktweise eine Hyperbel mit gegebenem Brennpunkt F, Leitlinie ℓ und speziellem Wert $\varepsilon = \frac{3}{2}$.

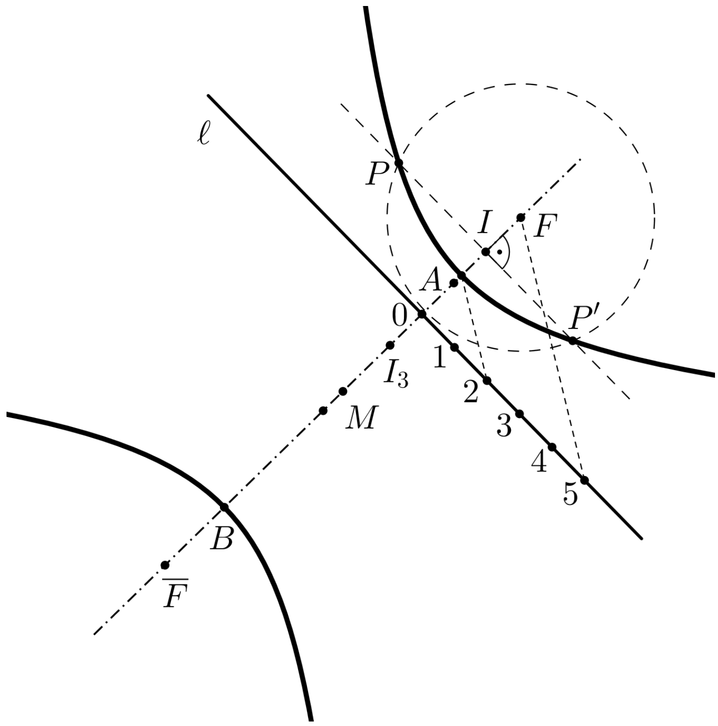
Lösung.

1) Wieder stellen wir uns als Erstes vor, es sei die Normale a zu ℓ durch F konstruiert. Diese Gerade a ist wieder aufgrund der bereits angeleiteten Symmetrie, die Hauptachse. Auf ihr liegen daher wieder die Hauptscheitel A und B. Alle Konstruktionen verlaufen analog zu jenen für die Ellipse.

2) Um den Punkt A zwischen F und ℓ konstruktiv zu erhalten, für den $AF = \frac{3}{2} \cdot A\ell$ gilt, bezeichnen wir wieder den Schnittpunkt von a und ℓ als 0 und markieren auf ℓ Punkte $1, 2, 3, 4$ und 5 mit $01 = 12 = 23 = 34 = 45$. Die Parallele zu $5F$ durch 2 schneidet dann a wie erwünscht im Punkt A, für den aufgrund des Strahlensatzes

$$A\ell : AF = A0 : AF = 20 : 25 = 1 : \frac{3}{2}$$

gilt.



3) Den zweiten Scheitel B erhalten wir, indem wir die Strecke der Länge $F0$ noch zwei Mal auf a von 0 mit dem Zirkel abschlagen. Dann gilt sicher für den resultierenden Punkt B wie erwünscht

$$B\ell : BF = B0 : BF = 2 : 3 = 1 : \frac{3}{2}$$

4) Schließlich wollen wir noch einen allgemeinen Punkt der Kurve konstruieren. Zu diesem Zweck wählen wir wieder einen beliebigen Punkt I auf a, aber in diesem Fall außerhalb der Strecke AB, und zeichnen die Normale zu a durch diesen Punkt I. Alle Punkte auf dieser Geraden haben denselben Abstand $I0$ von ℓ.

5) Die Hyperbelpunkte auf dieser Geraden haben von F einen Abstand, der $\frac{3}{2}$ so groß ist. Wir müssen also $\frac{3}{2}$ dieser Streckenlänge mit den Zirkel von F abschlagen. Wir erhalten $\frac{3}{2}$ der Streckenlänge indem wir die Strecke $0F$ halbieren, und diese halbe Streckenlänge auf die andere Seite von 0 als F abschlagen.Somit erhalten wir den Punkt I_3 mit der Eigenschaft

$$II_3 : I0 = 3 : 2 = \frac{3}{2} : 1.$$

6) Die Schnittpunkte P und P' der Normalen zu a durch I mit dem Kreis mit Mittelpunkt F und Radius II_3 sind somit zwei allgemeine Punkte der Hyperbel. Da wir I jenseits der Strecke AB auf a beliebig wählen können, haben wir somit eine Möglichkeit, beliebig viele Hyperbelpunkte auf diese Art zu konstruieren.

□