GRUNDLAGENBLATT – PAPIERSTREIFENKONSTRUKTION

Fragen & Antworten auf diesem Grundlagenblatt

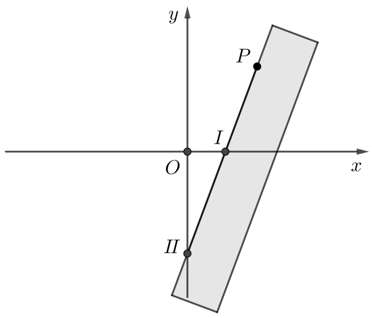
- ✓ Wie konstruiert man einen Punkt einer Ellipse mithilfe eines Papierstreifens?
- ✓ Was besagt die Umkehrung der Konstruktion und wie kann man diese nachweisen?
- ✓ Wieso ist die Konstruktion auch bei anderer relativer Lage der Punkte möglich?

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit einer alternativen Konstruktion von Punkten einer Ellipse auseinandersetzen.

Konstruktion 1. Konstruiere einen Punkt einer Ellipse mithilfe eines Papierstreifens.

Lösung.

In der Figur ist ein Koordinatensystem dargestellt, in das ein durch ein graues Rechteck angedeuteter Papierstreifen gelegt wurde. Am (geraden) Rand des Papierstreifens sind drei Punkte P, I und II markiert, und der Papierstreifen ist so in das Koordinatensystem gelegt, dass der Punkt I auf der x-Achse liegt und der Punkt II auf der y-Achse.

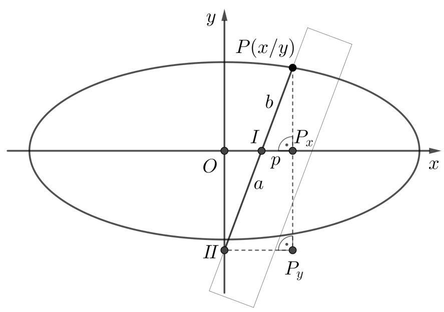


Bezeichnen wir den Abstand von P zu I als b und den Abstand von P zu II als a, so stellt sich heraus, dass der Punkt P dann auf der Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y2}{b^2} = 1$ zu liegen kommt.

Diese Gleichung definiert eine Ellipse in erster Hauptlage, siehe GB – Ellipsengleichung.

Den Grund dafür sehen wir in folgender Figur abgebildet.

In dieser Figur sind Strecken normal zur x-Achse durch P und normal zur y-Achse durch II eingezeichnet. Der Schnittpunkt dieser zueinander normalen Strecken ist mit P_y bezeichnet, und der Schnittpunkt von PP_y mit der x-Achse als P_x. Die beiden rechtwinkeligen Dreiecke P_xPI und P_yPII sind ähnlich, und es gilt somit



$$\frac{IIP_y}{IIP} = \frac{IP_x}{IP}.$$

Datum: 17. November 2022.

Wie bereits erwähnt, definieren wir $IIP = a$ und $IP = b$. Bezeichnen wir die Koordinaten von P als (x/y), so gilt $IIP_y = x$, und schreiben wir der einfacheren Notation halber $IP_x = p$, so erhalten wir daher

$$\frac{x}{a} = \frac{p}{b} \iff p = \frac{bx}{a}.$$

Im rechtwinkeligen Dreieck P_xPI gilt

$$IP_x^2 + P_xP^2 = IP^2,$$

und da $P_xP = y$ gilt, erhalten wir somit

$$p^2 + y^2 = b^2 \iff \frac{b^2x^2}{a^2} + y^2 = b^2 \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Der Punkt P liegt also auf der Ellipse in erster Hauptlage mit den Achsenlängen a und b. □

Umkehrung der Papierstreifenkonstruktion

Nun können wir aber auch zeigen, dass die Umkehrung dieses Ergebnisses gilt.

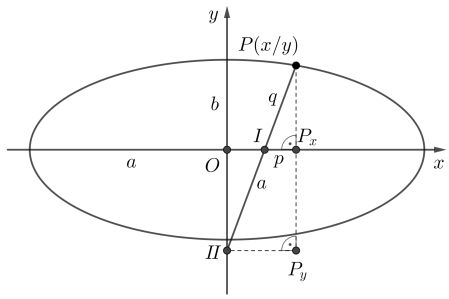
Umkehrung der Papierstreifenkonstruktion

Liegt ein Punkt P auf einer Ellipse in erster Hauptlage mit den Achsenlängen a und b, und bestimmen wir einen Punkt II auf der Nebenachse der Ellipse mit $PII = a$, so gilt für den Schnittpunkt I von IIP mit der Hauptachse der Ellipse sicher $IP = b$.

Beweis. Um dies zu zeigen, können wir die Überlegungen des vorangegangenen Abschnitts im wesentlichen in umgekehrter Reihenfolge durchführen.

Da $P(x/y)$ auf der Ellipse liegt, gilt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff \frac{b^2x^2}{a^2} + y^2 = b^2.$$



Wie schon oben, gilt für die gleichen Punkte P_x und P_y in den ähnlichen Dreiecken P_xPI und P_yPII wieder

$$\frac{IIP_y}{IIP} = \frac{IP_x}{IP}.$$

Da wir bereits wissen, dass $IIP_y = x$ und $IIP = a$ gilt, können wir wieder $IP_x = p$ definieren, und dazu $IP = q$, und erhalten somit

$$\frac{x}{a} = \frac{p}{q} \iff p = \frac{qx}{a}.$$

Im rechtwinkeligen Dreieck P_xPI gilt wieder

$$IP_x^2 + P_xP^2 = IP^2,$$

und wir erhalten somit

$$p^2 + y^2 = q^2 \iff \frac{q^2x^2}{a^2} + y^2 = b^2.$$

Da nun sowohl $\frac{q^2x^2}{a^2} + y^2 = b^2$ als auch $\frac{b^2x^2}{a^2} + y^2 = b^2$ gilt, folgt somit $q = b$, und der Abstand von I zu P ist somit, wie behauptet, gleich der Nebenachsenlänge der Ellipse.

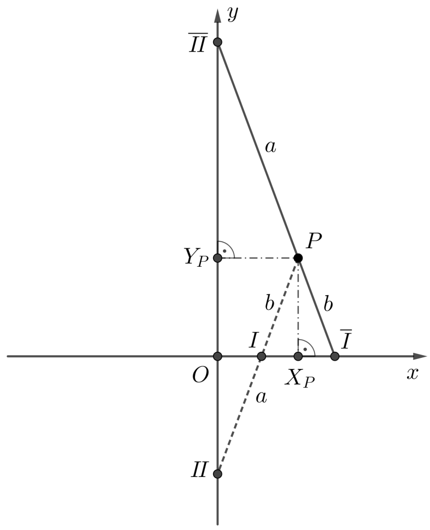
Alle Punkte der Ellipse können also mit Hilfe der Papierstreifenkonstruktion konstruiert werden. □

Die umgekehrte Papierstreifenkonstruktion ermöglicht die einfache konstruktive Bestimmung der Nebenachsenlänge einer Ellipse, wenn die Achsen und Hauptscheitel, sowie ein allgemeiner Ellipsenpunkt bekannt sind. Dies spielt in der klassischen darstellenden Geometrie eine wesentliche Rolle bei der Konstruktion von Normalrissen von Kreisen.

RELATIVE LAGE DER PUNKTE AUF DEM PAPIERSTREIFEN

Bisher haben wir in allen Figuren angenommen, dass sich die beiden Punkte I und II auf derselben Seite von P auf dem Papierstreifen befinden.

Alle bisherigen Argumente gelten aber ebenso, wenn P auf dem Papierstreifen zwischen I und II liegt. Dies ist in nebenstehender Figur abgebildet.
Die Punkte P, I und II sind wie bisher definiert. Dazu haben wir auch noch die Lotfußpunkte X_P und Y_P von P auf der x-Achse bzw. auf der y-Achse eingezeichnet, sowie die Punkte $\overline{I}$ und $\overline{II}$, wobei $\overline{I}$ symmetrisch zu I bezüglich X_P liegt und $\overline{II}$ symmetrisch zu II bezüglich Y_P.



Da $\angle P\overline{I}H_P = \angle X_P I P = \angle Y_P P I = \angle II P Y_P$ sehen wir, dass die Punkte $\overline{I}$, P und $\overline{II}$ genau dann kollinear liegen, wenn es auch die Punkte P, I und II tun. Es ist also gleichgültig, ob wir einen Papierstreifen verwenden, auf dem die Punkte P, I und II liegen, oder einen auf dem die Punkte P, $\overline{I}$ und $\overline{II}$ liegen. Wenn I (oder $\overline{I}$) auf der x-Achse liegt und II (oder $\overline{II}$) auf der y-Achse liegt, ist P auf jeden Fall ein Punkt der Ellipse.