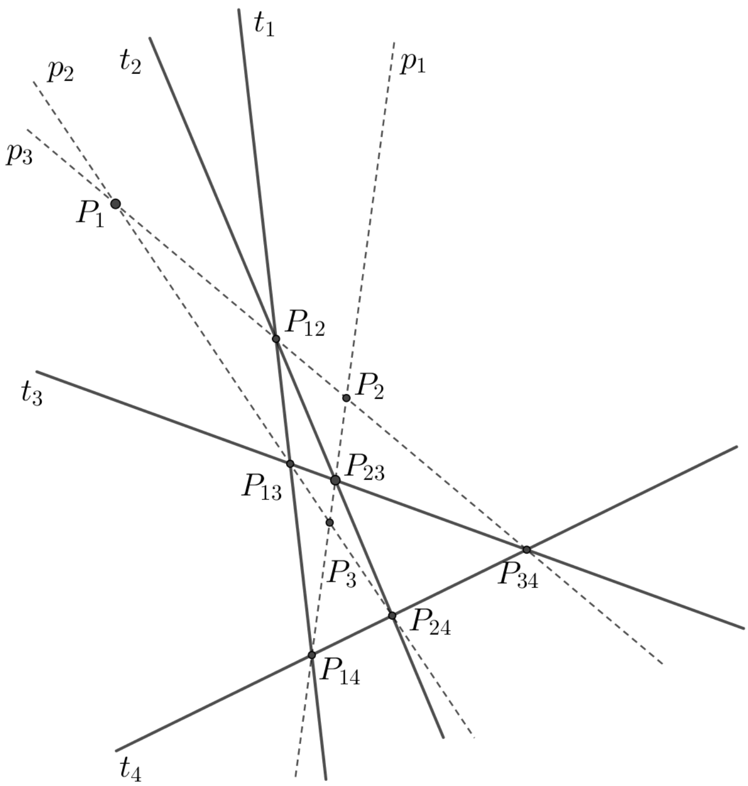
GRUNDLAGENBLATT – PARABEL DURCH VIER TANGENTEN

Gegeben seien vier Geraden t_1, t_2, t_3 und t_4, die so in der Ebene angeordnet sind, dass keine drei einen gemeinsamen Punkt haben und keine zwei zueinander parallel liegen. Wie wir am GB – Gemeinsame Eigenschaften der Kegelschnitte bereits überlegt haben, bestimmen fünf Geraden in allgemeiner Lage die Tangenten einer eindeutigen Kurve zweiten Grades. Wählen wir nur die Ferngerade als die fünfte dieser Tangenten, so ist die Kurve sicher eine Parabel. Wie am GB – Gemeinsame Eigenschaften der Kegelschnitte besprochen, ist das Diagonalendreiseit eines Tangentenvierseits in einem Kegelschnitt ein Poldreieck des Kegelschnitts. In folgender Figur ist das Diagonalendreieck $P_1P_2P_3$ des gegebenen Tangentenvierseits t_1, t_2, t_3, t_4 konstruiert worden und wir sehen, dass $p_1 = P_2P_3$ die Polare von P_1 bezüglich der zu bestimmenden Parabel ist, $p_2 = P_3P_1$ jene von P_2 und $p_3 = P_1P_2$ jene von P_3.

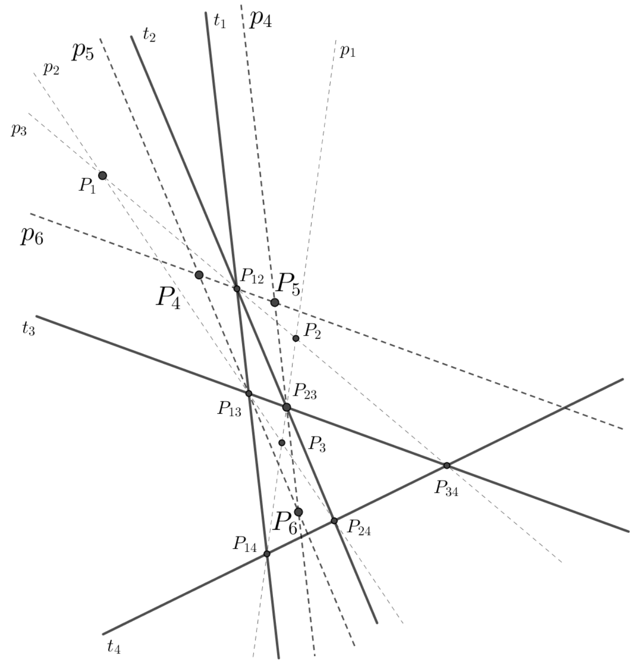


Datum: 17. November 2022.

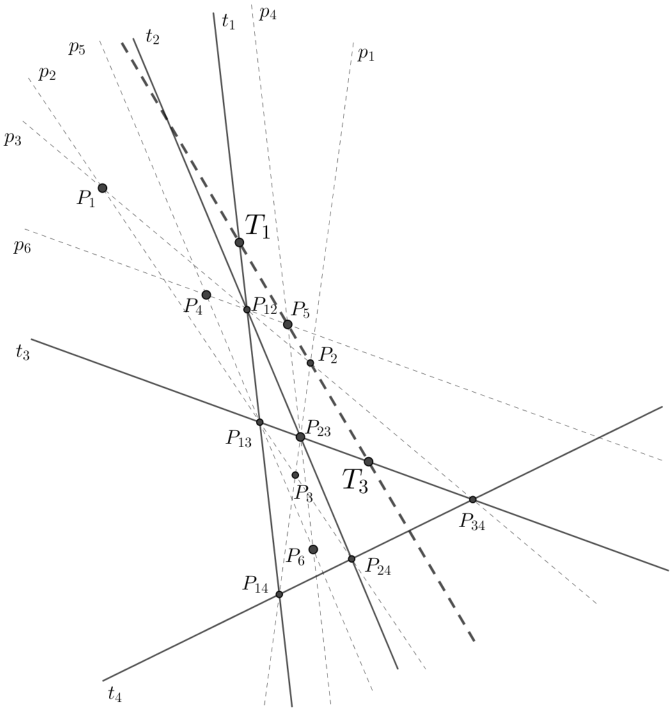
Konstruktion 1. Konstruiere die Kurve zweiten Grades durch das gegebene Tangentenvierseit t_1, t_2, t_3, t_4.

Lösung.

1) In Figur ist auch das Diagonalendreieck $P_4P_5P_6$ des Tangentenvierseits konstruiert, dessen Seiten t_1, t_2, t_3 und die Ferngerade sind. Hier sehen wir, dass $p_4 = P_5P_6$ die Polare von P_4 bezüglich der zu bestimmenden Parabel ist, $p_5 = P_6P_4$ jene von P_5 und $p_6 = P_4P_5$ jene von P_6.

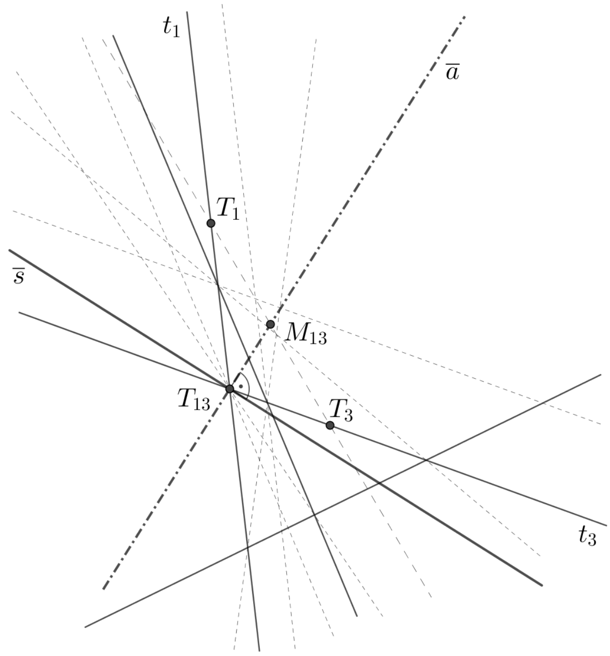


2) Nun betrachten wir den Punkt $P_{13} = t_1 \cap t_3$. Nachdem wir die beiden Diagonalendreiseite konstruiert haben, ergibt sich, dass dieser Punkt auch der Schnittpunkt der Geraden p_2 und p_5 ist. Die Polare dieses Punkts bezüglich der Parabel ist somit die Verbindungsgerade deren beiden Pole P_2 und P_3. Diese Gerade ist hier strichliert und etwas dicker eingezeichnet. Da der Pol P_{13} dieser Geraden auf der Tangente t_1 liegt, liegt auch der Pol von t_1, also der Berührpunkt T_1, auf der Geraden, und wir erhalten T_1 somit als Schnittpunkt von P_2P_5 mit t_1. Da aber P_{13} auch auf t_3 liegt, erhalten wir den Berührpunkt T_3 von t_3 mit der Parabel aus demselben Grund als Schnittpunkt von P_2P_5 mit t_3.

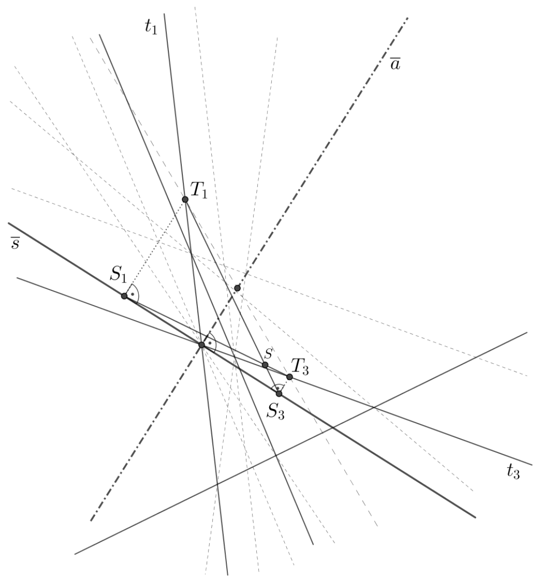


Nun kennen wir zu den beiden Tangenten t_1 und t_3 jeweils die Berührpunkte T_1 bzw. T_3. Wir kennen also zwei Linienelemente der Parabel, und können daher Achse, Scheitel, Brennpunkt und Leitlinie der Parabel mit der Konstruktion vom GB – Parabelvervollständigung vervollständigen.

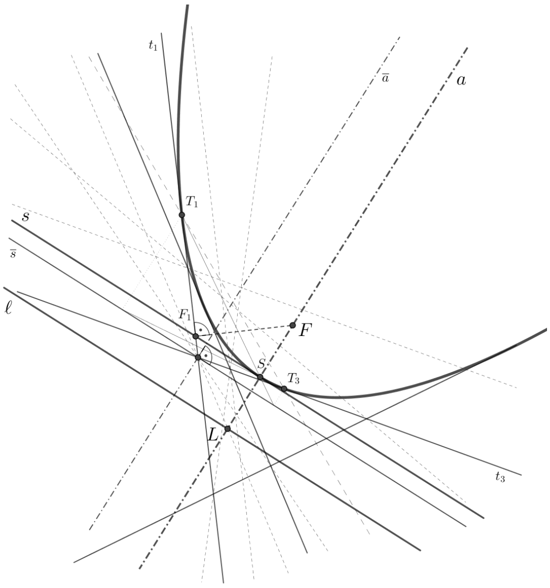
3) Wir haben den Schnittpunkt T_{13} von t_1 und t_3, sowie den Mittelpunkt M_{13} der Strecke T_1T_3 konstruiert. Wir erhalten dann unmittelbar die Parallele $\overline{a} = T_{13}M_{13}$ zur Parabelachse durch T_{13} und die Parallele $\overline{s}$ zur Leitlinie und zur Scheiteltangente durch T_{13} als Normale dazu.



4) Als nächstes konstruieren wir die Lotfußpunkte S_1 und S_3 von T_1 bzw. T_3 auf $\overline{s}$, und erhalten den Scheitel S der Parabel als Schnittpunkt von T_1S_3 und T_3S_1.



5) Nun konstruieren wir auch noch die Achse a parallel zu $\overline{a}$ durch S und die Scheiteltangente s parallel zu $\overline{s}$ durch S. Der Brennpunkt F ergibt sich als Schnittpunkt von a mit der Normalen zu einer Tangente (wir verwenden hier t_1) durch den Schnittpunkt dieser Tangente mit s (hier also $t_1 \cap s = F_1$). Die Leitlinie ℓ ist schließlich die Parallele zu s durch den Punkt L, der zu F symmetrisch liegt bezüglich S. Die Bestimmungsstücke der Parabel sind somit alle konstruiert.



□