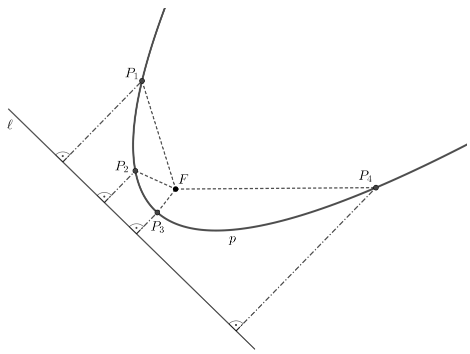
GRUNDLAGENBLATT – PARABELDEFINITION

Fragen & Antworten auf diesem Grundlagenblatt

- ✓ Was ist eine **Parabel**?
- ✓ Wie sind die Begriffe Brennpunkt und Leitlinie definiert?
- ✓ Wie konstruiert man einen Punkt auf einer Parabel?
- ✓ Wie konstruiert man Scheitel einer Parabel?

Parabel

In der Euklidischen Ebene seien ein Punkt F und eine Gerade ℓ gegeben. Der Punkt F soll dabei nicht auf ℓ liegen. Unter einer **Parabel** versteht man die Menge aller Punkte mit der Eigenschaft, dass ihr Abstand zum Punkt F gleich groß ist wie ihr Normalabstand zur Gerade ℓ.



In obiger Figur sehen wir die Parabel p, die sich aus der Vorgabe des abgebildeten Punkts F und der ebenfalls abgebildeten Gerade ℓ ergibt. (Ebenso wie man in einer solchen Figur nur ein begrenztes Stück der Gerade ℓ abbilden kann, ist hier auch nur ein begrenztes Stück der Parabel p zu sehen.) Alle vier exemplarisch eingezeichnete Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 haben die Eigenschaft, dass ihre Abstände zu F (jeweils strichliert gezeichnet) und ihre Normalabstände zu ℓ (jeweils strich-punktiert gezeichnet) gleich groß sind. (Dies kann man durch Messung auch leicht bestätigen.)

An dieser Stelle ist es interessant zu bemerken, warum wir vorausgesetzt haben, dass F nicht auf ℓ liegen soll. Würde F auf ℓ liegen, so wäre die Menge aller Punkte mit dieser Eigenschaft einfach die Gerade normal zu ℓ durch F, und diese Gerade wollen wir nicht in der Definition inkludieren.

Brennpunkt und Leitlinie

Den Punkt F bezeichnet man, ähnlich zum Gebrauch bei der Ellipse, als **Brennpunkt** der Parabel. Die Gerade ℓ bezeichnet man als **Leitlinie** (oder **Leitgerade**) der Parabel.

Datum: 17. November 2022.

Parabel als Punktmenge und gleichzeitig als Kurve

Wir haben nun die Parabel als Menge aller Punkte in der Euklidischen Ebene E^2 mit einer bestimmten Eigenschaft definiert. Bei Vorgabe des Punkts F und der Gerade ℓ können wir diese Menge auch kurz als folgende Punktmenge in E^2 anschreiben:

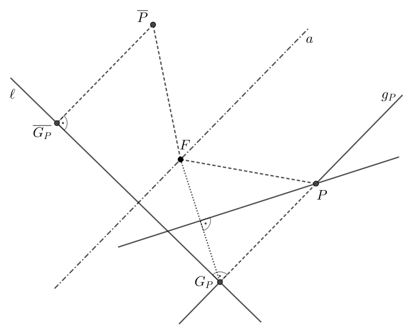
$$\{P; PF = P\ell\}$$

Wie schon bei der Ellipse, verbinden wir zwei grundlegend unterschiedliche Ideen miteinander. Einerseits sprechen wir von „einer Parabel“, also einem einzigen Objekt, einer **Kurve**, während wir andererseits von der Parabel als Punktemenge sprechen, also der (unendlich vielen) Punkte mit dieser Eigenschaft.
Im Gegensatz zur Ellipse, ist die Parabel nicht begrenzt. Wie wir im Rahmen der punktweisen Konstruktion der Kurve sehen, gibt es Punkte der Parabel, die beliebig weit von F bzw. von ℓ entfernt sind.

Konstruktion 1. Konstruiere einen Punkte P der Parabel, die beliebig weit von F bzw. von ℓ entfernt sind.

Lösung. In folgender Figur sieht man eine derartige punktweise Konstruktion abgebildet.

1) Auf der Leitlinie ℓ wird zunächst ein beliebiger Punkt G_P festgelegt.
2) Wir konstruieren die Normale zu ℓ durch G_P, sowie die Streckensymmetrale der Strecke FG_P. Den Schnittpunkt dieser beiden Geraden bezeichnen wir als P.
3) Da P auf der Streckensymmetrale von FG_P liegt, ist er von F und von G_P gleich weit entfernt.



Da er aber ferner auf der Normalen zu ℓ durch G_P liegt, ist der Abstand von P zu G_P gleich dem Normalabstand von P zu ℓ, und die definierende Parabeleigenschaft ist somit für diesen Punkt P erfüllt. □

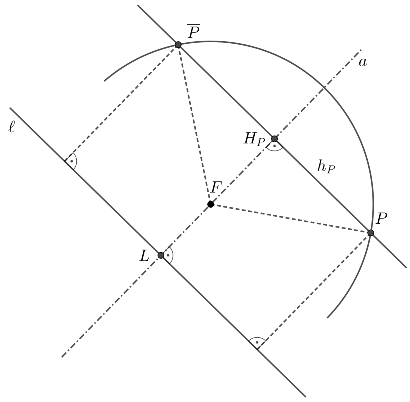
In dieser Figur ist auch die Normale zu ℓ durch F gezeichnet und mit a beschriftet. Spiegelung von G_P und P ergibt Punkte $\overline{G_P}$ (auf ℓ, da $a \perp \ell$ angenommen wurde) und $\overline{P}$. Wegen

$$\overline{P}F = PF = PG_P = \overline{PG_P} = \overline{P}\ell,$$

ist $\overline{P}$ auch ein Punkt der Parabel. Wir sehen, dass a eine Symmetrieachse der Parabel ist, die man schlicht als *Achse* der Parabel bezeichnet, da es nur eine gibt.

Konstruktion 2. Konstruiere einen Punkte P der Parabel, die beliebig weit von F bzw. von ℓ entfernt sind.

Lösung. In folgender Figur sieht man eine weitere derartige punktweise Konstruktion abgebildet.



1) Bestimme zuerst die Achse a und wählen einen beliebigen Punkt H_P auf a.
2) Konstruiere dann die Normale h_P zu a durch H_P. Da diese Gerade parallel zu ℓ liegt, haben alle Punkte von h_P denselben Normalabstand von ℓ.
3) Nun bezeichnen wir den Schnittpunkt von a mit ℓ als L und zeichnen den Kreis mit Mittelpunkt F und Radius H_PL.

Für die beiden Schnittpunkte P und $\overline{P}$ dieses Kreises mit h_P gilt nun

$$FP = F\overline{P} = H_PL.$$

Da P und $\overline{P}$ auf h_P liegen, gilt auch

$$P\ell = \overline{P}\ell = H_PL,$$

und die Punkte P und $\overline{P}$ sind daher sicher Punkte der Parabel. □

In beiden Konstruktionen sehen wir, dass Punkte mit der definierenden Parabeleigenschaft bestimmt werden können, die beliebig weite von F bzw. ℓ entfernt liegen, womit die Kurve unbeschränkt ist.

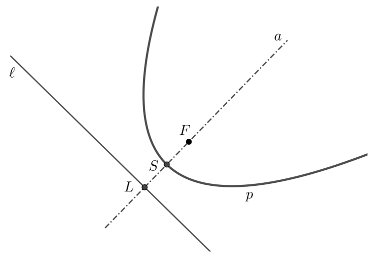
Die Frage nach Punkten der Kurve auf der Achse ist im Fall der Parabel viel einfacher zu beantworten als es bei der Ellipse war. Der Mittelpunkt S der Strecke FL ist der einzige Punkt auf a, der auch auf der Parabel liegt.

Scheitel

Für den Punkt S gilt

$$SF = SL = S\ell,$$

womit dieser auf jeden Fall ein Parabelpunkt ist. Da der Normalabstand von jedem Punkt auf a zu ℓ gleich seinem Abstand zu L ist, und jeder andere Punkt von a entweder näher zu F als zu L ist oder umgekehrt, gibt es keinen weiteren Parabelpunkt auf der Achse a. Der Punkt S ist somit der einzige **Scheitel** der Parabel, da die Kurve auch keine weitere Symmetrieachse besitzt.



Mittelpunkt

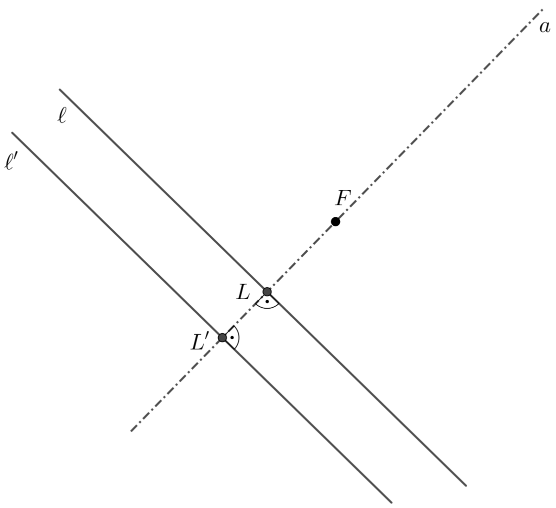
Wir bemerken auch, dass die Parabel, im Gegensatz zur Ellipse, kein Symmetriezentrum, also keinen **Mittelpunkt**, besitzt.

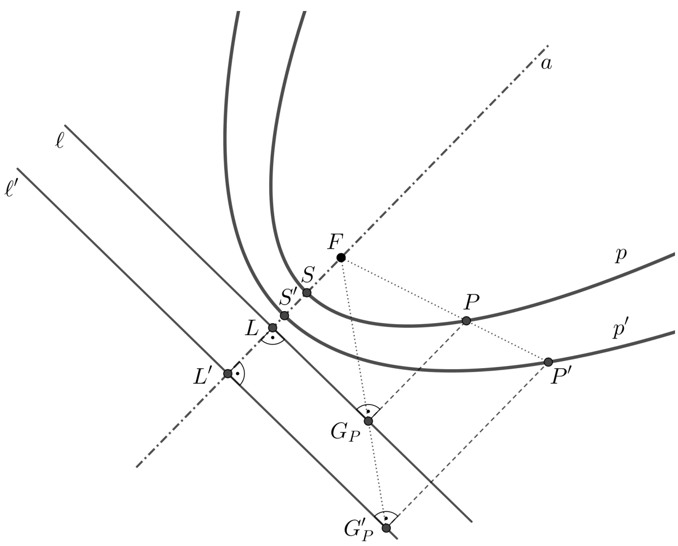
Konstruktion 3. Konstruiere zwei Parabeln die zueinander ähnlich sind.

Lösung. Zwei Parabeln sind ohne Beschränkung der Allgemeinheit so in der Ebene verschoben, dass ihre Achsen in a und ihre Brennpunkte in F zusammenfallen.

1) Die Leitlinie ℓ der Parabel p schndeidet a in L.

2) Die Leitlinie ℓ' der Parabel p' schneidet a in L'. Da die beiden Leitlinien normal zur gemeinsamen Achse stehen, sind sie sicher zueinander parallel.





Im rechten Teil der Figur nehmen wir nun an, eine zentrische Streckung mit Zentrum in F bilde den Punkt L auf L' ab. Diese zentrische Streckung bildet jeden Punkt der Parabel p mit Brennpunkt F und Leitlinie ℓ auf einen Punkt P' der Parabel p' mit dem Brennpunkt F und der Leitlinie ℓ' ab. Um dies zu beweisen, nehmen wir an, dass P ein beliebiger Punkt von p sei. Bezeichnen wir den Lotfußpunkt von P auf ℓ als G_P, so gilt $PF = PG_P$. Die gegebene zentrische Streckung bildet G_P auf einen Punkt G'_P auf ℓ' ab, und P auf einen Punkt P'. Aufgrund der zentrischen Streckung sind die beiden Dreiecke FPG_P und $FP'G'_P$ zueinander ähnlich, und es gilt somit auch $P'F = P'G'_P$, womit P' sicher ein Punkt der Parabel mit Brennpunkt F und Leitlinie ℓ' ist.

Wir sehen, dass die gegebene zentrische Streckung die Parabel p auf die Parabel p' abbildet, womit die beiden Parabeln zueinander ähnlich sein müssen. □

Ähnlichkeit

Je zwei Parabeln sind zueinander ähnlich.