GRUNDLAGENBLATT – PARABELGLEICHUNG

Fragen & Antworten auf diesem Grundlagenblatt

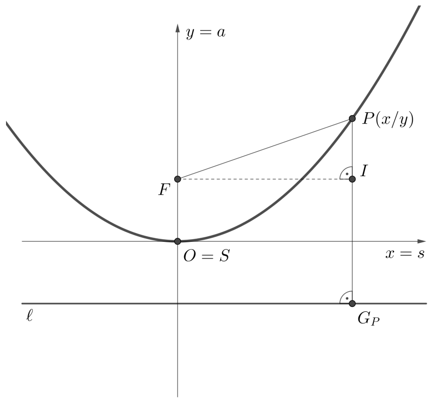
✓ Wie sind Parabeln in erster und zweiter Hauptlage charakterisiert?
✓ Wie lautet die **Parabelgleichung** für Parabeln in erster bzw. in zweiter Hauptlage?

Wie auf dem Grundlagenblatt – Parabeldefinition besprochen, ist die Parabel als Punktmenge

$$\{P; PF = P\ell\}$$

definiert, wobei F der Brennpunkt der Parabel ist, und ℓ die Leitlinie. Wir haben dort auch schon festgestellt, dass die Normale a zu ℓ durch F eine Symmetrieachse der Parabel ist. Den Parabelpunkt S auf der Achse a haben wir als den Scheitel der Parabel bezeichnet.

In nebenstehender Figur haben wir F, S, ℓ und a in ein Koordinatensystem eingebettet, wobei wir die Koordinaten $F(\frac{p}{2}/0)$ annehmen, und $\ell : y = -\frac{p}{2}$ als Gleichung von ℓ. Die Zahl $p > 0$ bezeichnen wir als *Parameter* der Parabel. Dadurch liegt der Punkt S im Ursprung. Die Achse a liegt dann in der y-Achse und die Scheiteltangente s in der x-Achse, und der Parameter p gibt den *Normalabstand* von F zu ℓ an.



Charakterisierung "Hauptlage“

$$\ell : y = -\frac{p}{2}$$

Diese Lage der Parabel relativ zu den Koordinatenachsen bezeichnen wir als **(zweite) Hauptlage** der Parabel. Die „erste“ Hauptlage erhalten wir, wenn wir die Rollen der x- und y-Achsen vertauschen. Wir werden im Folgenden die „zweite“ Hauptlage einfach als „Hauptlage“ bezeichnen.

Nun nehmen wir an, ein allgemeiner Punkt P der Parabel sei eingezeichnet, wobei seine Koordinaten mit $P(x/y)$ als variabel angenommen werden. (In dieser Zeichnung haben wir $x > 0$ und $y > \frac{p}{2}$ angenommen, aber die folgenden Überlegungen gelten mit kleinen Vorzeichenänderungen für alle möglichen Lagen von P.) Der Lotfußpunkt von P auf ℓ, also der Gegenpunkt G_P von P, ist auch noch eingezeichnet, und ebenso als Hilfspunkt der Lotfußpunkt I von F auf PG_P. Diese beiden Punkte

Datum: 17. November 2022.

haben aufgrund der angenommenen Lage im Koordinatensystem die Koordinaten $G_P(x/-\frac{p}{2})$ bzw. $I(x/\frac{p}{2})$.

Nun wissen wir, dass die Strecken FP und FG_P laut Parabeldefinition gleich lang sind. Dies ist gleichwertig mit

$$\begin{aligned} & \sqrt{FI^2 + IP^2} = FG_P \\ \iff & \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = y + \frac{p}{2} \\ \iff & x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{p}{2}\right)^2 \\ \iff & x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4} \\ \iff & x^2 = 2py. \end{aligned}$$

Gleichung der Parabel in zweiter Hauptlage

Wir erkennen also, dass ein Punkt mit den Koordinaten $P(x/y)$ genau dann auf der Parabel in (zweiter) Hauptlage mit Parameter p liegt, wenn

$$x^2 = 2py$$

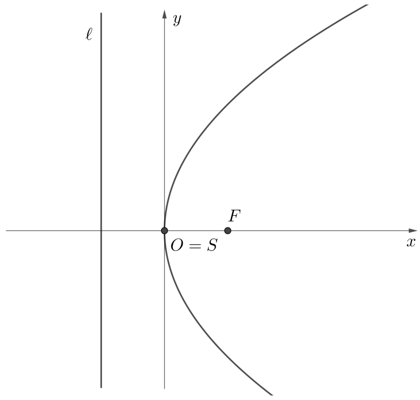
gilt. Dividiert man diese Gleichung durch den Faktor $2p$, erkennt man, dass dies gleichwertig mit der Gültigkeit der Gleichung

$$y = \frac{1}{2p} \cdot x^2$$

ist. Den Ausdruck

$$x^2 = 2py \iff y = \frac{1}{2p} \cdot x^2$$

bezeichnet man als **Gleichung der Parabel** in (zweiter) Hauptlage. (An der rechten Schreibweise erkennen wir ganz nebenbei, dass diese Definition des Parabelbegriffs erfreulicherweise mit der Definition als Funktionskurve der quadratischen Funktion $f(x) = ax^2$ übereinstimmt.)



Vertauschen wir die Rollen der Koordinatenachsen und nehmen an, dass der Brennpunkt als $F(\frac{p}{2}/0)$ und die Leitlinie als $\ell : x = -\frac{p}{2}$ gegeben seien, erhalten wir die Situation, die in der Figur nebenan abgebildet ist.

Gleichung der Parabel in erster Hauptlage

Diese Lage der Parabel relativ zu den Koordinatenachsen bezeichnen wir als die erste Hauptlage. Da man die Ableitung der Ellipsengleichung in diesem Fall vollkommen analog zu der für die zweite Hauptlage, unter Vertauschung der Rollen von x und y, durchführen kann, erhalten wir in diesem Fall die **Parabelgleichung**

$$y^2 = 2px.$$