GRUNDLAGENBLATT – PARABELVERVOLLSTÄNDIGUNG

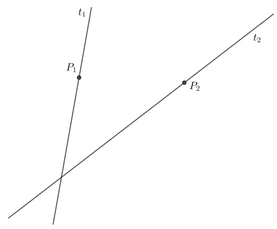
Fragen & Antworten auf diesem Grundlagenblatt

- ✓ Wie konstruiert man Brennpunkt und Leitlinie eine Parabel, wenn die Tangenten gegeben sind?
- ✓ Warum ist die Konstruktion für den Brennpunkt und die Leitlinie zulässig?

In diesem Abschnitt betrachten wir eine Möglichkeit, Brennpunkt und Leitlinie einer Parabel konstruktiv zu bestimmen, wenn Parabeltangenten bereits gegeben sind.

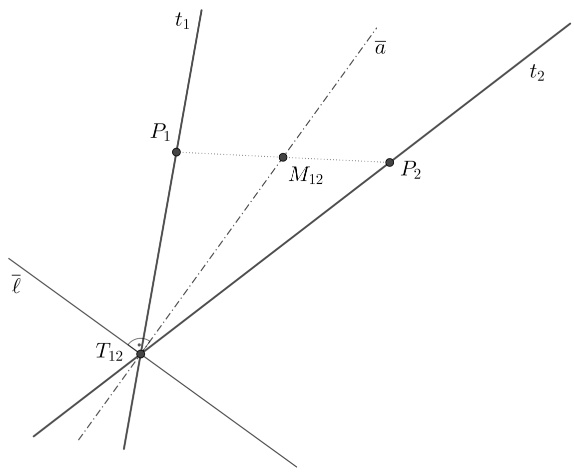
Konstruktion 1.

In der Figur sehen wir zwei gegebene „Linienelemente“ einer Parabel, also Tangenten t_1 und t_2 mit den Berührpunkten P_1 bzw. P_2. Konstruier den Brennpunkt F und die Leitlinie ℓ der Parabel.



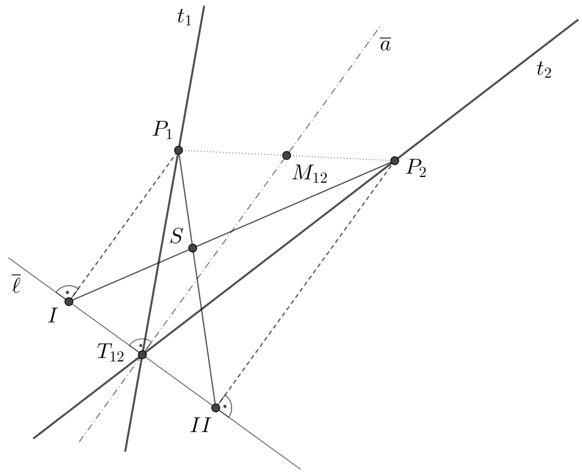
Lösung.

1) Wir bestimmen den Mittelpunkt M_{12} der Strecke P_1P_2 und den Schnittpunkt T_{12} von t_1 und t_2 wir bezeichnen ihre Verbindungsgerade als $\overline{a}$ es wird sich herausstellen, dass diese Gerade parallel zur Parabelachse a ist, und die Normale zu $\overline{a}$ durch T_{12} als $\overline{\ell}$ (da diese Gerade daher parallel zur Leitlinie ℓ der Parabel liegen wird).

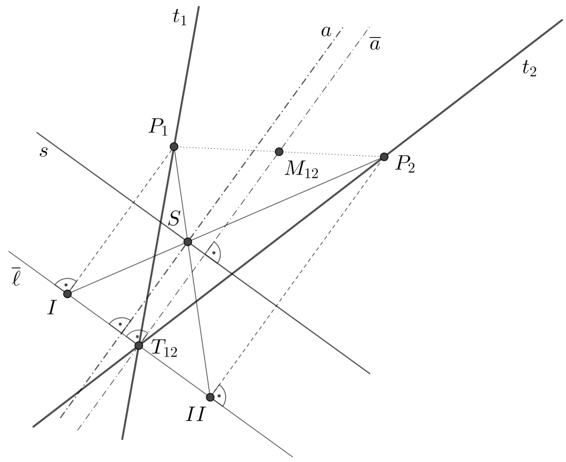


Datum: 17. November 2022.

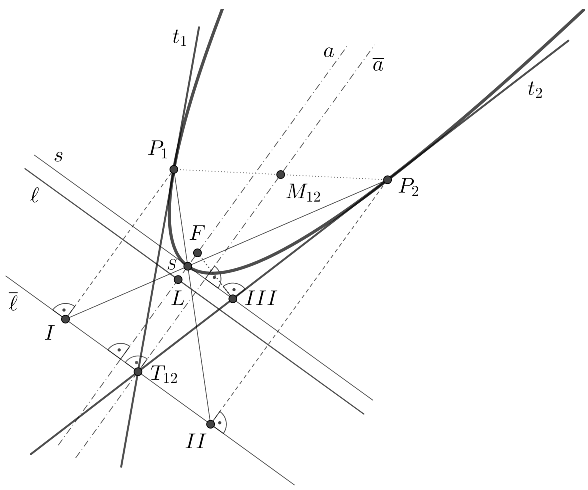
2) Wir haben die Lotfußpunkte I und II von P_1 bzw. P_2 auf $\overline{\ell}$ konstruiert. Es stellt sich heraus, dass der Schnittpunkt S von IP_2 und IIP_1 der Scheitel der Parabel ist.



3) Wir können also, wie in der Figur nebenan, sofort die Scheiteltangente s durch S und normal zu $\overline{a}$ konstruieren, und die Parabelachse a durch S und parallel zu $\overline{a}$.



4) Nun können wir schließlich den Brennpunkt F und die Leitlinie ℓ der Parabel konstruieren. Wir erhalten F als Schnittpunkt von a mit der Normalen zu t_2 durch den Schnittpunkt III von t_2 mit s. Der Schnittpunkt L von a mit ℓ liegt dann symmetrisch zu F bezüglich S, und ℓ ist dann die Normale zu a durch L.

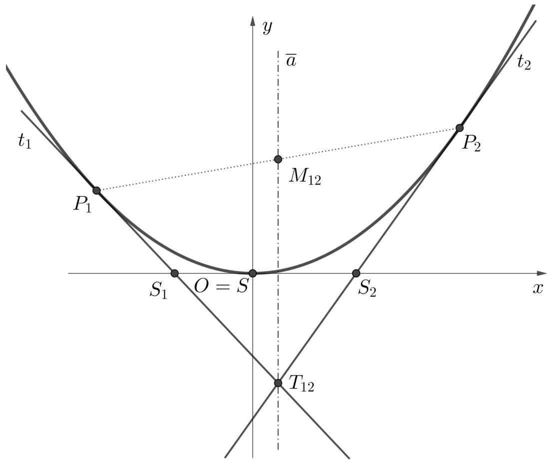


Die Parabel ist also durch F und ℓ bestimmt.

$\square$

Um nun zu erkennen, warum diese Konstruktion gilt, vergleichen wir die Punkte, die wir in den Konstruktionsschritten erzeugt haben mit der Situation, die wir auf dem GB – Eigenschaften von Parabeltangenten betrachtet haben.

Diese ist in der Figur nebenan in einer etwas modifizierten Lage dargestellt.



Die Parabel mit der Gleichung $x^2 = 2py$ ist hier in (zweiter) Hauptlage gegeben, und wir sehen die beiden Tangenten t_1 und t_2 mit ihren Berührpunkten P_1 bzw. P_2. Die Schnittpunkte von t_1 und t_2 mit der x-Achse sind mit S_1 bzw. S_2 bezeichnet. Wir nemhen an, die Koordinaten dieser Schnittpunkte seien mit $S_1(a/0)$ und $S_2(b/0)$ bekannt.

Auf dem GB – Eigenschaften von Parabeltangenten haben wir schon erkannt, dass die x-Koordinate von S_1 genau halb so groß wie jene von P_1 ist, und wir erhalten somit die x-Koordinate $2a$ von P_1 und mit einer analogen Überlegung auch die x-Koordinate $2b$ von P_2. Das einsetzen in der Parabelgleichung ergibt daher die Koordinaten $P_1\left(2a/\frac{2a^2}{p}\right)$ und $P_2\left(2b/\frac{2b^2}{p}\right)$. Sofort erkennen wir, dass die x-Koordinate des Mittelpunkts M_{12} von P_1P_2 gleich $\frac{2a+2b}{2} = a + b$ ist.

Damit kennen wir aber auch, wie auf dem GB – Eigenschaften von Parabeltangenten ausgeführt, schon die Gleichungen der beiden Tangenten als

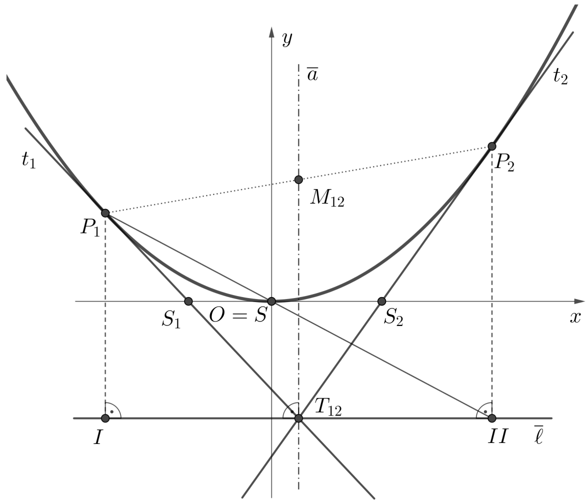
$$t_1 : y = \frac{2a}{p} \cdot x - \frac{2a^2}{p} \quad \text{und} \quad t_2 : y = \frac{2b}{p} \cdot x - \frac{2b^2}{p}.$$

Für die x-Koordinate des Schnittpunkts T_{12} dieser beiden Tangenten erhalten wir also

$$\frac{2a}{p} \cdot x - \frac{2a^2}{p} = \frac{2b}{p} \cdot x - \frac{2b^2}{p} \iff a \cdot x - a^2 = b \cdot x - b^2 \iff x = a + b.$$

Die x-Koordinate von T_{12} ist also gleich der x-Koordinate von M_{12}, womit ihre Verbindung, wie behauptet, parallel zur y-Achse, also zur Parabelachse, liegt.

In der Figur nebenan sehen wir schließlich, warum wir den Scheitel als Schnittpunkt von IP_2 und IIP_1 erhalten.Wie in der KOnstruktion bei Schritt 3 sehen wir hier den Hilfspunkt I als Lotfußpunkt von P_1 auf $\overline{\ell}$ und II als Lotfußpunkt von P_2 auf $\overline{\ell}$.



Wir wissen bereits, dass die x-Koordinate von T_{12} gleich $a + b$ ist, und Einsetzen in einer der beiden Geradengleichungen (hier die Gleichung von t_1) ergibt die y-Koordinate

$$y = \frac{2a}{p} \cdot (a + b) - \frac{2a^2}{p} = \frac{2ab}{p}.$$

Da die y Koordinaten von I, II und T_{12} gleich sind, erhalten wir also die Koordinaten

$$I\left(2a/\frac{2ab}{p}\right) \quad \text{und} \quad II\left(2b/\frac{2ab}{p}\right).$$

Vergleichen wir nun die Koordinaten von $P_1\left(2a/\frac{2a^2}{p}\right)$ und $II\left(2b/\frac{2ab}{p}\right)$, erkennen wir wegen

$$2a : \frac{2a^2}{p} = 2b : \frac{2ab}{p},$$

dass die Verbindungsgerade von P_1 und II durch den Ursprung $O = S$ gehen muss. Dies gilt analog auch wegen $P_2\left(2b/\frac{2b^2}{p}\right)$ und $I\left(2a/\frac{2ab}{p}\right)$ für die Verbindung von P_2 und I.

Die Gültigkeit der Konstruktion von S ist somit ebenfalls nachgewiesen. Die abschließende Bestimmung von F und ℓ ist bereits vom KB – Parabeltangenten mit Gegenpunkten bekannt, und wir haben somit eine vollständige Begründung der Vervollständigungskonstruktion.