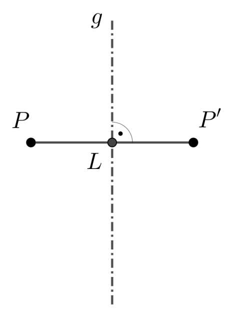
GRUNDLAGENBLATT – POL UND POLARE

Fragen & Antworten auf diesem Grundlagenblatt

- ✓ Wie ist die **Inversion an einem Kreis** definiert?
- ✓ Wie unterscheidet sich die Inversion am Kreis von der Spiegelung eines Punktes an einer Geraden?
- ✓ Wie kann man den **inversen Punkt** eines gegebenen Punktes konstruieren?
- ✓ Was ist eine **Polare**, was ist ein **Pol**?
- ✓ Wie hängt die Polare mit harmonischer Teilung zusammen?
- ✓ Wie ist ein **Poldreieck** definiert und warum gibt es dieses?

Bei der gewöhnlichen Spiegelung an einer Geraden g, bilden wir einen Punkt P auf den dazu symmetrischen Punkt P', wie in folgender Abbildung dargestellt, ab.

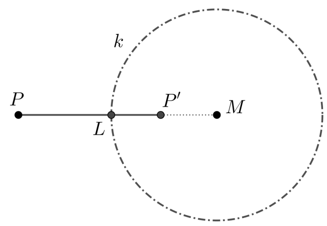


Der Punkt L ist dabei der Lotfußpunkt von P auf g, und P' ist der Punkt auf der Verlängerung von PL mit $PL = P'L$. Der Begriff „Spiegelung“ deutet an, dass diese Situation daran erinnert, dass ein Beobachter im Punkt P das eigene Spiegelbild in g betrachtet, und das eigene Bild als alternative Version von sich selbst auf der anderen Seite von g interpretiert.

Diese Abbildung vertauscht die Punkte auf der einen Seite der Geraden g (der „Spiegelachse“) mit den Punkten auf der anderen Seite in umkehrbar eindeutiger Weise.

Nun ist es naheliegend, diese Idee dahingehend zu erweitern, dass die Spiegelung an einem Kreis anstatt einer Geraden durchgeführt werden kann. Die Grundidee dazu ist in folgender Abbildung dargestellt.

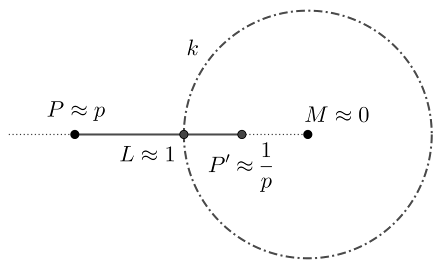
Datum: 17. November 2022.



Der Kreis k mit Mittelpunkt M spielt hier die Rolle der „Spiegelachse“. Der Punkt L ist nun der Schnittpunkt des Strahls MP mit k (dieser Strahl steht normal zu k und L ist somit so etwas wie ein „Lotfußpunkt“ von P auf k), und P' ist wieder ein Punkt auf diesem Strahl, aber auf der anderen Seite von k. Wir möchten den Punkt P' so definieren, dass die Abbildung, analog zur Geradenspiegelung, die Punkte auf der einen Seite von k mit den Punkten auf der anderen Seite in umkehrbar eindeutiger Weise vertauscht.

Inversion am Kreis MmF

Stellen wir uns den Kreis k als Einheitskreis vor (also als Kreis mit Radius 1), und den Strahl MP als positiven Teil der Zahlengeraden mit Ursprung O in M. Der Wert 0 ist dann dem Punkt M zugeordnet, der Wert 1 dem Punkt L, und ein Wert p dem Punkt P.
Definieren wir den Punkt, der dem Wert $\frac{1}{p}$ zugeordnet ist als P', so werden die Punkte zwischen M und L (mit Werten zwischen 0 und 1) wie gewünscht auf umkehrbar eindeutige Weise mit den Punkten auf dem Strahl außerhalb von k (mit Werten größer als 1) vertauscht.



MmF

Diese Abbildung hat einige interessante Eigenschaften. Die Punkte auf dem Kreis k bleiben, ebenso wie die Punkte der Spiegelachse bei der Geradenspiegelung, fix. Dem Punkt M entspricht leider kein Punkt bei diesem Verfahren; er muss also ausgeschlossen werden. Bis auf diesen Punkt werden allerdings in der Tat die Punkte im Inneren des Kreises k mit den Punkten außerhalb von k in umkehrbar eindeutiger Weise vertauscht.

Vergleichen wir diese Abbildung mit der Geradenspiegelung, fällt auf, dass hier ein begrenzter Bereich (innerhalb des Kreises) mit einem unbegrenzten Bereich (außerhalb) vertauscht wird. Dies ist anders als bei der Geradenspiegelung, wo zwei unbegrenzte Bereiche vertauscht werden.

Inverser Punkt

Offensichtlich bildet dieses Verfahren aufgrund der Verwendung der Kehrwerte auch den Punkt P' auf P ab. Wir bezeichnen die beiden Punkte P und P' als *invers* bezüglich k.

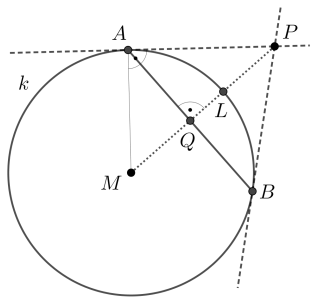
Nun stellt sich heraus, dass inverse Punktepaare auch durch rein synthetisch geometrische Methoden konstruiert werden können, das bedeutet, ohne auf die Einbettung eines Zahlenstrahls zurückgreifen zu müssen.

Eigenschaft inverser Punkte

Es seien P und P' inverse Punkte bezüglich eines Kreises k mit Mittelpunkt M und Radius r, wobei P außerhalb von k liegt. Es seien A und B die Berührpunkte der Tangenten durch P an k mit k. Dann ist P' der Schnittpunkt von AB mit PM.

Beweis. Nach der Definition des inversen Punkts muss P' auf PM liegen. Es genügt also zu zeigen, dass P' auf AB liegt.

Es sei also Q der Schnittpunkt von AB mit PM. Wir wollen zeigen, dass $Q = P'$ gilt, also dass Q der inverse Punkt zu P bezüglich k ist. Um dies nachzuweisen, betrachten wir die beiden Dreiecke APM und QAM. Diese beiden Dreiecke sind wegen $\angle MAP = \angle AQM = 90°$ beide rechtwinkelig. Ferner sind die beiden Winkel $\angle MAQ$ und $\angle APM$ wegen $AP \perp AM$ und $PM \perp AB$ Normalwinkel, und somit gleich groß.



Die beiden Dreiecke sind also ähnlich, und es gilt

$$MQ : MA = MA : MP \iff MP \cdot MQ = MA^2 = r^2.$$

Legen wir also den Zahlenstrahl wie in der Definition des inversen Punktes vorausgesetzt, gilt $ML = r = 1$, und somit tatsächlich $MQ = \frac{1}{MP}$, also $Q = P'$, wie behauptet. □

Konstruktion des inversen Punktes I

Wir erhalten also eine rein synthetische Möglichkeit, den inversen Punkt zu jedem Punkt $P \neq M$ zu bestimmen.

a) Ist P außerhalb von k, legen wir die beiden Tangenten durch P an k mit den Berührpunkten A bzw. B. Der Inverse Punkt ergibt sich dann als Schnittpunkt von AB mit PM.

b) Liegt P im Inneren von k, schneiden wir die Normale zu MP durch P mit k und bestimmen in den beiden Schnittpunkten A und B die Tangenten an k. Der Schnittpunkt dieser beiden Tangenten ist dann der inverse Punkt P'.

c) Schließlich ist jeder Punkt von k zu sich selbst invers.

Außerdem bemerken wir, dass im Kreis k mit Mittelpunkt M und Radius r, sicher die Beziehung

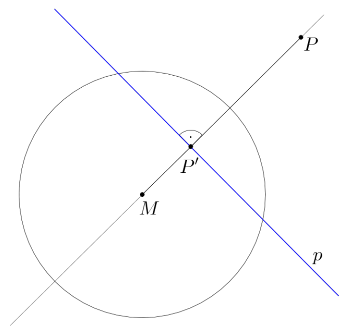
$$PM \cdot P'M = r^2$$

für jedes Paar $P,\ P'$ inverser Punkte gilt.

Im Rahmen dieses Beweises haben wir erkannt, dass die Berührsehne der Tangenten, die wir von einem Punkt außerhalb eines Kreises legen können, in diesem Zusammenhang eine wesentliche Rolle spielen. Wir definieren also folgende Begriffe.

Polare und Pol

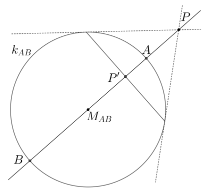
Gegeben seien ein Kreis k mit Mittelpunkt M und Radius r, sowie ein Punkt $P \neq M$. Wir bezeichnen den Punkt P' auf der Geraden PM mit $PM \cdot P'M = r^2$ als *inversen Punkt* zu P bezüglich k, und die Gerade p durch P' mit $p \perp PM$ als **Polare** von P bezüglich k.
Ferner bezeichnen wir P als **Pol** von p bezüglich k.



Mit dieser Begriffsbildung sind wir in der Lage, eine weitere synthetische Konstruktionsmöglichkeit für den inversen Punkt anzugeben. Hierfür ist die folgende Bemerkung entscheidend:

Zusammenhang inverser Punkt und harmonische Teilung

Der Punkt P liegt harmonisch zu P' bezüglich AB.

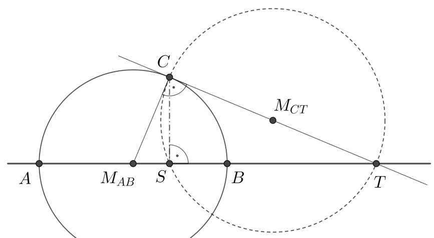


Man kann den inversen Punkt P' somit auch mittels harmonischer Teilung des Durchmessers AB von k_{AB} definieren, auf dessen Trägergerade der gegebene Punkt P liegt. Diese Methode kann unabhängig davon angewandt werden, ob P innerhalb oder außerhalb von k liegt.

Wir wollen diese Aussage begründen.

Wie im GB – Harmonische Teilung bereits besprochen, kann man den vierten harmonischen Punkt zu einem vorgegebenen Punkt S auf einer Strecke AB bezüglich des Punktepaares AB wie in der Abbildung zu sehen konstruieren.

Die Normale zu AB durch S schneidet den Kreis mit Durchmesser AB im Punkt C. Die Normale zu $M_{AB}C$ durch C schneidet dann die Gerade AB im harmonischen Punkt T zu S bezüglich AB, wobei M_{AB} wie üblich den Mittelpunkt der Strecke AB bezeichnet.



Bezeichnen wir den Mittelpunkt von CT als M_{CT}, sehen wir, dass der Kreis mit Durchmesser CT, und somit mit Mittelpunkt M_{CT} wegen $\angle TSC = 90°$ aufgrund des Satzes von Thales im Punkt S schneidet. Ferner sehen wir in dieser Zeichnung, dass die beiden Kreise mit Durchmesser AB und CT wegen $\angle M_{AB}CM_{CT} = 90°$ einander rechtwinkelig schneiden.

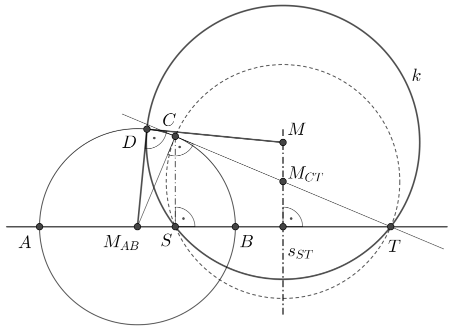
Wir können also folgenden Satz formulieren.

Satz über vier harmonische Punkte und rechtwinkelig schneidende Kreise

Gegeben seien eine Strecke AB und ein Punkt S auf der Strecke AB. Der Punkt T auf der Geraden AB ist *genau dann* der vierte harmonische Punkt zu S bezüglich AB, wenn es einen Kreis mit der Sehne ST gibt, der den Kreis mit Durchmesser AB rechtwinkelig schneidet. Ist T zu S bezüglich AB harmonisch, so schneidet jeder Kreis k mit der Sehne ST den Kreis mit Durchmesser AB rechtwinkelig.

Beweis. Aufgrund der Konstruktion wissen wir schon, dass es einen solchen Kreis k sicher gibt, wenn T der vierte harmonische Punkt zu S bezüglich AB ist. Es bleibt also nur mehr die Umkehrung zu beweisen.

Nehmen wir an, es gibt einen beliebigen Kreis k mit der Sehne ST und dem Mittelpunkt M, der den Kreis mit dem Durchmesser AB in einem Punkt D schneidet.
Der Mittelpunkt M von k liegt sich auf der Streckensymmetralen s_{ST} von ST.
Wie schon bisher sei C der Schnittpunkt der Normalen zu AB mit dem Kreis mit Durchmesser AB.



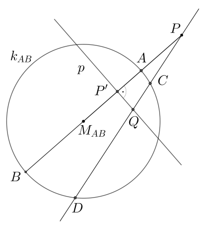
Aufgrund der bereits bekannten Konstruktion des harmonischen Punkts T zu S wissen wir, dass CT der Durchmesser eines Kreises ist, der den Kreis mit Durchmesser AB normal schneidet, womit $M_{AB}C$ eine Tangentialstrecke von M_{AB} an diesen Kreis ist. (Der Kreis ist in der Skizze strichliert eingezeichnet). Mittels Sekanten-Tangentensatz folgt für den Punkt M_{AB} bezüglich dieses Kreises, dass $M_{AB}S \cdot M_{AB}T = M_{AB}C^2$ gilt.

Der Sekanten-Tangentensatz angewendet auf M_{AB} bezüglich des Kreises k liefert ebenfalls den Term $M_{AB}S \cdot\ M_{AB}T$, und die Tangentialstrecke von M_{AB} an k ist somit gleich lang wie die Strecke $M_{AB}C$. Der Punkt von k mit dieser Eigenschaft ist aber genau der Punkt D, und k schneidet somit ebenfalls den Kreis mit Mittelpunkt M_{AB} durch C, als den Kreis mit Durchmesser AB, rechtwinkelig. Der Term $M_{AB}S \cdot\ M_{AB}T$ wird auch *Potenz* des Punktes M_{AB} bezüglich des Kreises k genannt. □

Wir haben also das Werkzeug zur Verfügung, um folgenden Satz zu beweisen:

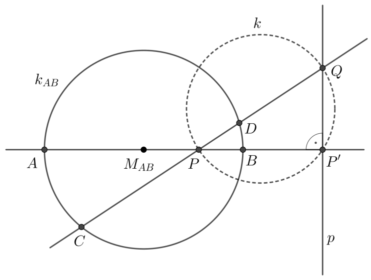
Satz über harmonische Teilung einer Sehne durch Polare

Gegeben seien ein Kreis k_{AB} mit Durchmesser AB und Mittelpunkt M_{AB}. Weiters seien ein Punkt $P \neq M_{AB}$ gegeben, der nicht auf k_{AB} liegt sowie die Polare p bezüglich P. Eine Gerade durch P schneide die Polare p in Q und den Kreis k_{AB} in den Punkten C und D.
Dann liegt der Punkt Q harmonisch zu P bezüglich CD.



Beweis. Sei P ein Punkt auf der Strecke AB. (Der Beweis für den Punkt P außerhalb des Kreises kann analog geführt werden).

Bezeichnen wir den Lotfußpunkt von P auf p als P', so wissen wir schon, dass P' harmonisch zu P bezüglich AB liegt. Nach dem vorangehende Satz wissen wir also, dass der Umkreis k von $PP'Q$ den Kreis k_{AB} rechtwinkelig schneidet.



Nach dem Satz von Thales wissen wir wegen $\angle QP'P = 90°$, dass der Mittelpunkt von k der Mittelpunkt der Strecke PQ ist, und nach dem vorangehenden Satz schneidet der Kreis k_{AB}, der k rechtwinkelig schneidet, die Gerade PQ somit sicher in zwei Punkten, nämlic C und D, die harmonisch bezüglich PQ liegen. □

Konstuktion des inversen Punktes II

Ist P innerhalb (oder außerhalb) von k mit Mittelpunkt $M \neq P$, so konstruiert eine Sehne (bzw. eine Sekante) durch P, die den Kreis k in je zwei Punkten C und D schneidet. Man konstruiert den zu P bezüglich CD harmonischen Punkt Q. Dieser liegt auf der Polare p. Nach Definition der Polare kann nun P' als Lot von Q auf PM konstruiert werden. Die Gerade QP' ist gleichzeitig auch die Polare p.

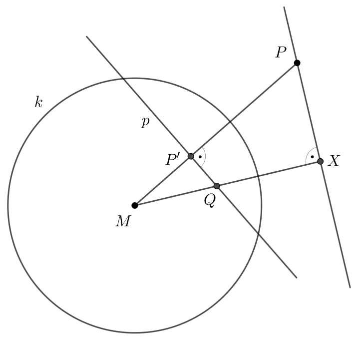
Wir sind nun in der Lage ein weiteres bemerkenswertes Ergebnis zu formulieren.

Satz über Polare

Gegeben seien ein Kreis k mit Mittelpunkt M und Radius r, sowie ein Punkt $P \neq M$ und die Polare p bezüglich P. Es sei Q ein Punkt von p. Der Punkt P liegt dann auf der Polare q von Q bezüglich k.

Beweis. Es sei in der Figur p die Polare von P bezüglich k.

Der Punkt Q sei ein beliebiger Punkt von p, und X sei der Lotfußpunkt von P auf die Gerade MQ.
Nun betrachten wir die Dreiecke $MP'Q$ und MXP. Wegen $\angle MP'Q = \angle PXM = 90°$ sind beide Dreiecke rechtwinkelig, und da sie den Winkel in M gemeinsam haben, sind sie ähnlich.



Es gilt somit

$$MP' : MQ = MX : MP \iff MP \cdot MP' = MQ \cdot MX.$$

Da P' der inverse Punkt zu P ist, gilt aber $MP \cdot MP' = r^2$, und somit gilt auch $MQ \cdot MX = r^2$. Die Punkte Q und X sind also ebenfalls invers bezüglich k, und es gilt $X = Q'$. Da PX normal zu MX gewählt wurde, ist somit PQ' normal zu MQ, und diese Gerade ist somit die Polare q zu Q bezüglich k. Wir sehen also, dass

$$Q \in p \Rightarrow P \in q$$

wie behauptet gilt. □

Aus diesem Satz folgt unmittelbar die Existenz von sogenannten Poldreiecken.

Satz über Poldreiecke

Liegen zwei Punkte Q und R auf der Polaren p eines Punktes P bezüglich eines Kreises k, so ist P der Schnittpunkt der Polaren q bzw. r dieser beiden Punkte. Man bezeichnet das Dreieck mit den Seiten p, q und r und den Eckpunkten P, Q und R als ein *Poldreieck* von k.