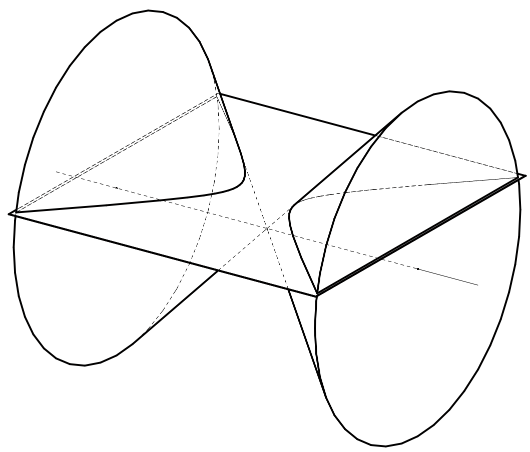
GRUNDLAGENBLATT – RÄUMLICHE INTERPRETATION DER HYPERBEL

Fragen & Antworten auf diesem Grundlagenblatt

✓ Wie führt man die Vervollständigungskonstruktion aus?
✓ Welche Eigenschaften hat das Drehhyperboloid?
✓ Wie konstruiert man die Hyperbelhautscheitel?

In diesem Abschnitt wollen wir zwei Möglichkeiten kennen lernen, wie man Konstruktionen an einer Hyperbel durchführen kann, wenn die beiden Asymptoten und ein Punkt der Hyperbel bekannt sind. In beiden Fällen werden wir uns drei-dimensionale Interpretationen der gegebenen Angaben zunutze machen.

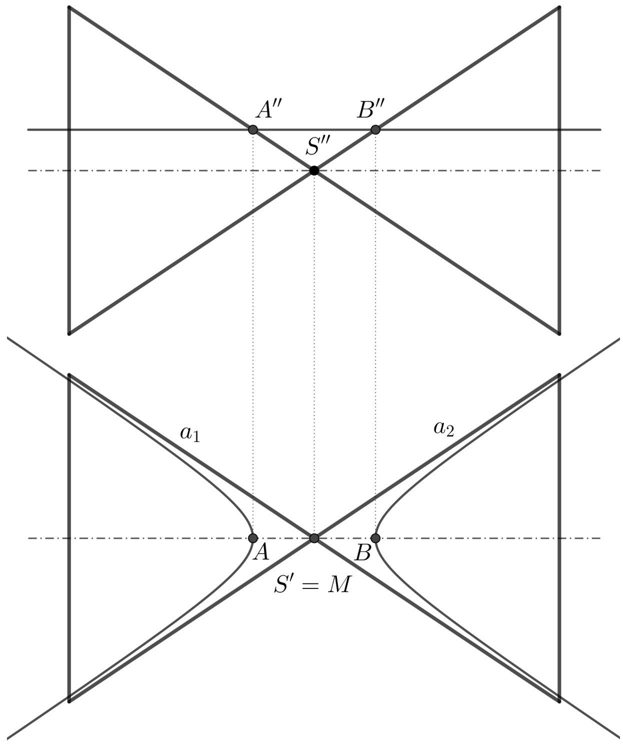
Als Vorbereitung für die erste derartige Konstruktion, betrachten wir zuerst folgende Figur. In dieser sehen wir einen Drehkegel (Doppelkegel) mit waagrechter Achse und eine waagrechte Ebene, parallel zur Kegelachse, dargestellt. Eine solche achsenparallele Ebene schneidet den Drehkegel nach einer Hyperbel.



Man kann dies auf mehrere Arten beweisen, zum Beispiel mit Hilfe der so-genannten Dandelin Kugeln. An dieser Stelle setzen wir diese Tatsache allerdings als bekannt voraus.

Datum: 17. November 2022.

In der Figur nebenan ist dieselbe Situation wie oben in Grund- und Aufriss dargestellt. Die Kegelspitze ist mit S beschriftet und der Kegel wird mit der Ebene geschnitten, die durch die beiden Punkte A und B geht. Diese beiden Punkte erscheinen aufgrund der Symmetrie der gegebenen Lage im Grundriss als Scheitel der Hyperbel. Überhaupt erscheint die Schnitthyperbel im Grundriss offensichtlich in wahrer Gestalt, da die Ebene dieser Hyperbel parallel zur Grundrissebene liegt. Diese beiden Punkte A und B sind im Raum auch die Scheitel der räumlichen Hyperbel.



Wir identifizieren im Grundriss die Punkte A und B mit ihren Grundrissen, da es uns in weiterer Folge um die räumliche Interpretation der ebenen Figur gehen wird. Wir nehmen also an, die Schnittebene sei mit der Grundrissebene identisch.

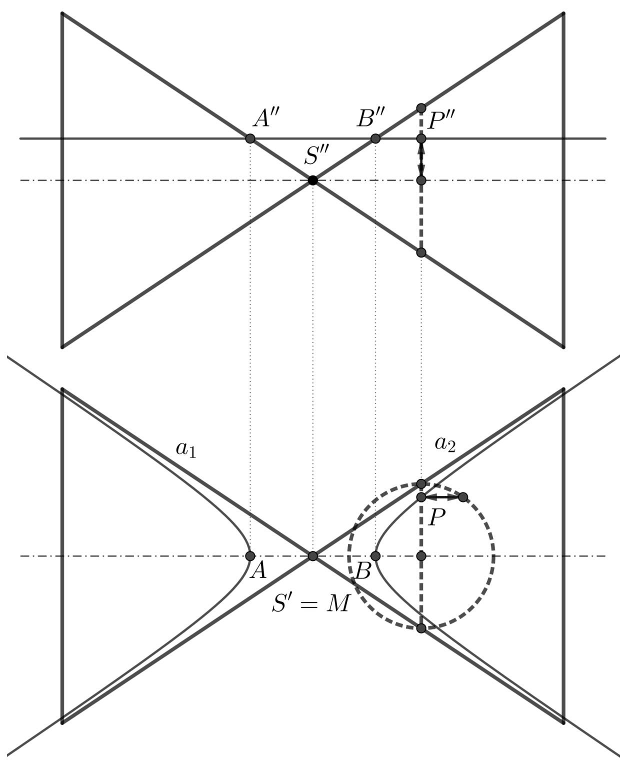
MmF

Die beiden Punkte A und B sind im Raum die Scheitel der räumlichen Hyperbel. Im Grundriss sind weiters die Bilder der Kegelumrisserzeugenden auch die Asymptoten a_1 und a_2 der Bildhyperbel.

Dies folgt unmittelbar aus der Symmetrie der Lage (das Bild S' der Kegelspitze ist aus Symmetriegründen auch der Mittelpunkt M der Bildhyperbel), sowie der Tatasache, dass die Kegelerzeugenden in der Ebene parallel zur Hyperbelebene durch die Kegelachse auch parallel zur Hyperbelebene liegen. Die Fernpunkte dieser Erzeugenden sind daher sicher Fernpunkte der Hyperbel, und die Geraden, die in dieser Richtung zeigen und durch den Hyperbelmittelpunkt M gehen sind daher sicher die Hyperbelasymptoten. Dies sind aber genau die Umrisserzeugenden im Grundriss.

In der Figur nebenan ist nun zum Bild der obigen Figur noch ein Punkt P der Hyperbel eingezeichnet. Als Punkt der Schnitthyperbel liegt P sowohl auf dem Kegel als auch in der Hyperbelebene.

Da P auf der Kegelfläche liegt, liegt dieser Punkt auf einem Schichtkreis des Kegels. Die Trägerebene dieses Schichtkreises ist normal zur Kegelachse und der Schichtkreis erscheint sowohl im Grundriss als auch im Aufriss als Strecke in Ordnerrichtung. Diese Bildstrecken sind in beiden Rissen als dicke strichlierte Linien eingezeichnet. Der Aufriss P'' liegt auf dem Ordner durch P und auf der Aufrissgeraden der Hyperbelebene. Im Grundriss ist zudem dieser Kreis um 90° gedreht dargestellt, wodurch sich der Normalbstand von P zur Parallelebene zur Hyperbelebene durch S ergibt. Dieser Abstand ist in Grund- und Aufriss jeweils durch ein Doppelpfeil angedeutet.



Daruas leiten wir nun die folgende Konstruktion ab.

Konstruktion 1 (Vervollständigungskonstruktion)**.** Gegeben sind die beiden Asymptoten a_1 und a_2 einer Hyperbel (mit Schnittpunkt M), sowie ein Punkt P der Hyperbel. Konstruiere die Scheitel der Hyperbel.

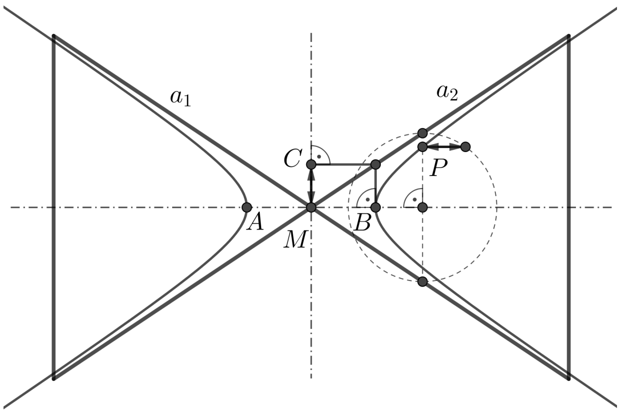
Lösung.

1) Die Achsen der Hyperbel erhalten wir sofort als Winkelsymmetralen des von den Asymptoten eingeschlossenen Winkels. Dabei ist diejenige Winkelsymmetrale im Winkelfeld von P die Hauptachse.

2) Interpretieren wir diese wie in obiger Figur besprochen, konstruieren wir die umgeklappte Lage des Schichtkreises von P auf dem Kegel, und erhalten somit den Abstand der Hyperbelebene zur Parallelebene durch die Kegelspitze.

3) Fassen wir also die gegebenen Hyperbelasymptoten kurzfristig als Kegelumriss im Aufriss auf, so können wir diesen Abstand senkrecht, also auf der Hyperbelnebenachse, auftragen, womit wir den Punkt erhalten, der hier mit C gekennzeichnet ist.

4) Wir erhalten von diesem Punkt C ausgehend die Hauptscheitel der Hyperbel, indem wir die Parallele zur Hauptachse durch C mit den Asymptoten schneiden, und von diesen Punkten die Lote auf die Hauptachse fällen.

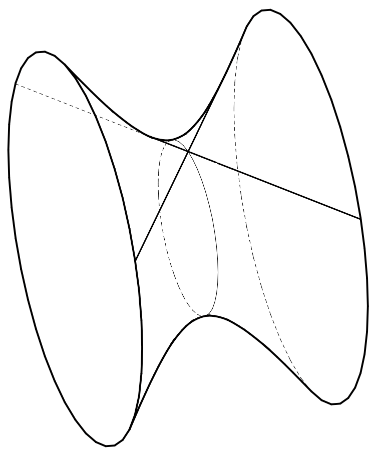


Dies ist hier nur rechts für den Hauptscheitel B ausgeführt; A liegt symmetrisch zu B bezüglich M.

□

Somit haben wir eine Konstruktion der beschriebenen Art bereits zur Verfügung. Um diese Idee nun in etwas anderer Form zu verwenden, betrachten wir folgende Figur.

In dieser Figur sehen wir ein einschaliges Drehhyperboloid mit waagrechter Achse dargestellt. Auf dem Hyperboloid sind zwei erzeugende Geraden dargestellt. Diese sind die Schnittgeraden des Hyperboloids mit der waagrechten Tangentialebene im obersten Punkt des Kehlkreises des Hyperboloids.



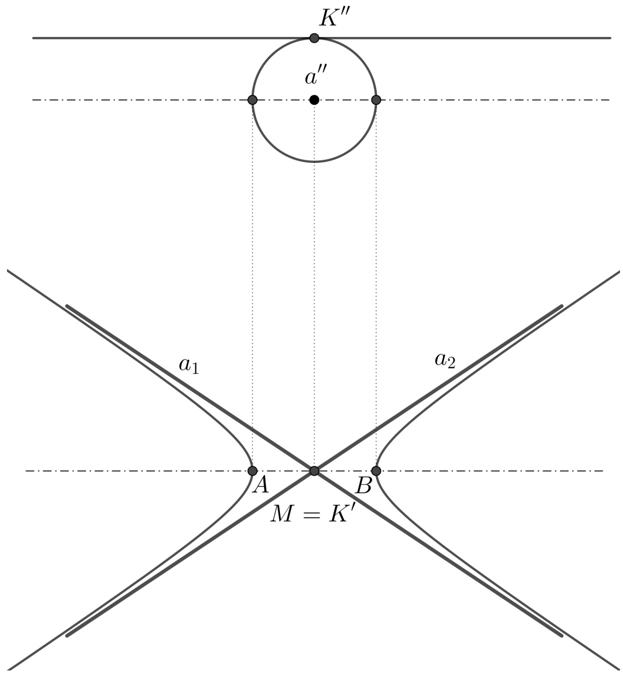
Um dies zu verstehen, ist etwas Grundlagenwissen über das einschalige Drehhyperbolid notwendig. An dieser Stelle wollen wir diese Eigenschaften des Drehhyperboloids nur in Erinnerung rufen, und nicht beweisen.

Eigenschaften des Drehhyperboloids

Dreht man eine Hyperbel um die Nebenachse, bildet die Menge aller Punkte, die auf den Bahnkreisen der Hyperbelpunkte liegen ein **einschaliges Drehhyperboloid**. Diese Fläche entsteht alternativ auch durch das Drehen einer Geraden um eine windschiefe Drehachse.
Die Drehung des Gemeinlots einer solchen erzeugenden Geraden mit der Drehachse erzeugt den **Kehlkreis** des Hyperboloids, weil der Fußpunkt des Gemeinlots auf der Erzeugenden den kleinsten Abstand aller Punkte der Erzeugenden zur Drehachse hat.
Die Erzeugende steht normal zum Gemeinlot, und liegt somit in der Ebene normal zum Kehlkreisradius, also aufgrund der Symmetrie in der Tangentialebene des Hyperboloids im Punkt des Kehlkreises.
Da eine Spiegelung des Hyperboloids an einer Ebene durch die Drehachse das Hyperboloid unverändert lässt, die erzeugende Gerade aber in eine andere Gerade überführt, gibt es eine zweite Schar von erzeugenden Geraden, die ebenfalls auf dem Hyperboloid liegen.
Es liegt je eine Erzeugende aus jeder Schar in jeder Tangentialebene in einem Kehlkreispunkt.

Nun betrachten wir die obige Situation wieder in Grund- und Aufriss.

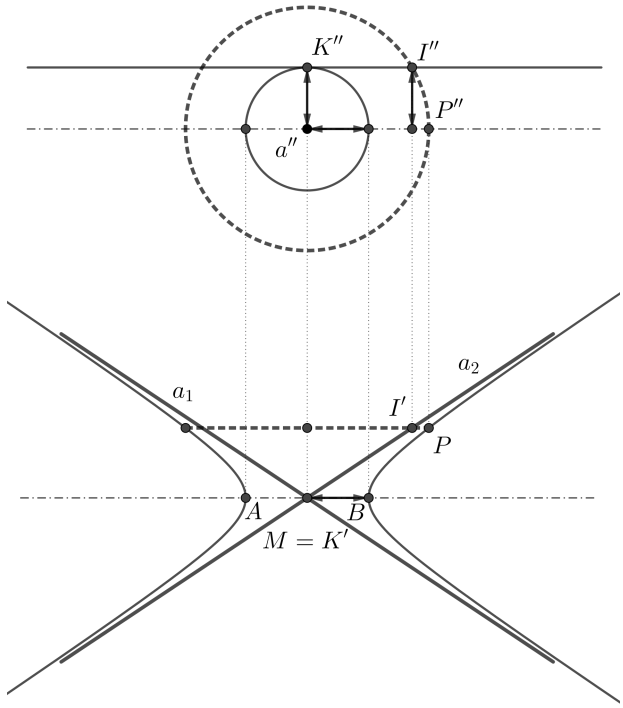
In dieser Figur sind die Objekte von obiger Figur in Grund- und Aufriss dargestellt. Auf dem Hyperboloid sind zwei erzeugende Geraden, die Schnittgeraden des Hyperboloids mit der waagrechten Tangentialebene im obersten Punkt des Kehlkreises, dargestellt. Es fällt sofort auf, dass der Grundriss in dieser Figur mit jener ersten Figur fast identisch ist, aber aufgrund einer anderen räumlichen Interpretation zustande gekommen ist.



Die Hyperbel ist in dieser Interpretation der Umriss des Drehhyperboloids im Grundriss. Dies ist gleichzeitig der Grundriss des wahren Umrisses des Hyperboloids für den Grundriss, also der Schnitthyperbel des Hyperboloids mit der waagrechten Ebene durch die Hyperboloidachse. Der Aufriss dieser Achse ist mit a'' beschriftet, und der Aufriss dieser Ebene ist strich-punktiert eingezeichnet. Die Asymptoten der Hyperbel sind die Grundrisse der Schnitterzeugenden des Hyperboloids mit der waagrechten Tangentialebene, die das Hyperboloid im dargestellten Punkt K berührt. Da die Hyperbelebene und die Tangentialebene zueinander parallel sind, haben ihre Schnitte mit dem Hyperboloid dieselben Fernpunkte, und die Erzeugenden in der Tangentialebene sind somit sicher parallel zu den Asymptoten der Umrisshyperbel des Hyperboloids. Aus Symmetriegründen erscheint der Schnittpunkt K dieser Erzeugenden im Grundriss identisch mit dem Mittelpunkt M der Hyperbel, und die Bilder dieser Erzeugenden im Grundriss sind daher, wie behauptet, die Asymptoten der Hyperbel.

Ergänzt man nun einen Punkt P der Hyperbel im Grundriss, und betrachten die Konsequenzen in folgender Figur.

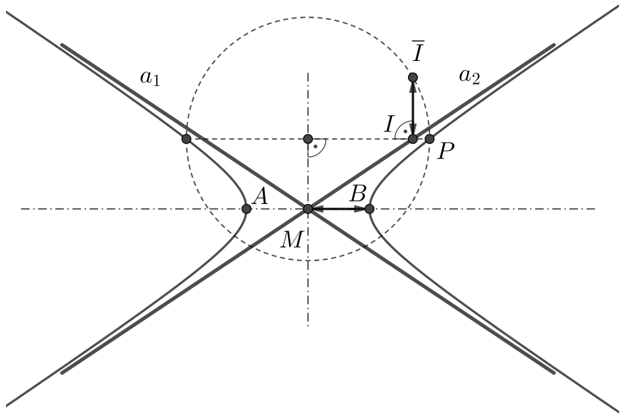
Der Aufriss P'' von P liegt auf dem Aufriss der Hyperbelebene, also auf der stichpunktierten waagrechten Geraden durch a''. Schneiden wir das Hyperboloid mit der Normalebene zu a durch P, erhhalten wir einen Schichtkreis, dessen Grund- und Aufriss hier durch dicke strichlierte Linien angedeutet sind. Der Grundriss ist eine Strecke normal zur Nebenachse der Hyperbel durch P. Da der Mittelpunkt dieses Kreises im raum auf a liegt, ist der Mittelpunkt dieser Bildstrecke auf dem Ordner durch a''. Der Aufriss dieses Kreises ist der Kreis mit Mittelpunkt in a'' durch P''.



Den Durchstoßpunkt der Hyperboloiderzeugenden, die im Grundriss als Asymptote a_2 erscheint, wird mit I beschriftet. Im Grundriss liegt er auf der strichlierten Strecke und im Aufriss auf dem strichlierten Kreis. Nun bemerken wir, dass der Abstand von I'' zur Umrissebene des Hyperboloids, der durch einen Doppelpfeil im Aufriss angedeutet ist, auch als Normalabstand von K zu a auftritt. Da dieser Abstand der Radius des Kehlkreises ist, ist dies auch im Grundriss die Hauptachenlänge der Hyperbel. Wir sehen, dass die vier Strecken, die in dieser Zeichnung durch Doppelpfeile angedeutet sind, alle gleich lang sind.

Konstruktion 2 (Hyperbelhauptscheitel)**.** Gegeben sind die beiden Asymptoten a_1 und a_2, sowie ein Punkt P der Hyperbel. Konstruiere die Hauptscheitel der Hyperbel.

An die Stelle des Aufrisses tritt hier nur der Kreis durch P mit Durchmesser normal zur Hyperbelnebenachese.



Lösung.

1) Wir erhalten die Achsen der Hyperbel als Winkelsymmetralen der Asymptoten, wobei die Hauptachese diejenige Winkelsymmetrale ist, die im gleich Winkelfeld wie P liegt.

2) Nun konstruieren wir die Normale zur Nebenachse durch P und zeichnen den Kreis durch P, dessen Mittelpunkt der Lotfußpunkt von P auf der Nebenachse ist.

3) Wir bezeichnen den Schnittpunkt der Normalen zur Nebenachse durch P mit der Asymptote a_2 als I und konstruieren die Normale zu Haptachse durch I.

4) Den Schnittpunkt einer Normalen durch I mit dem Kreis bezeichnen wir als $\overline{I}$.
item Dann erhalten wir die Hauptachsenlänge der Hyperbel als Länge der Strecke $I\overline{I}$.

5) Wir erhalten somit die Hauptscheitel, indem wir diese Streckenlänge vom Schnittpunkt der Asymptoten auf der Hauptachse abschlagen.

Der Vergleich der beiden letzten Figuren zeigt uns, dass die Doppelpfeile wieder gleich lange Strecken andeuten. □