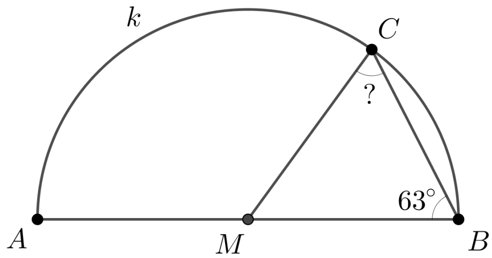
Grundlagenblatt – Satz von Thales

1. Einführende Aufgaben

Eine Winkeljagd am Kreis

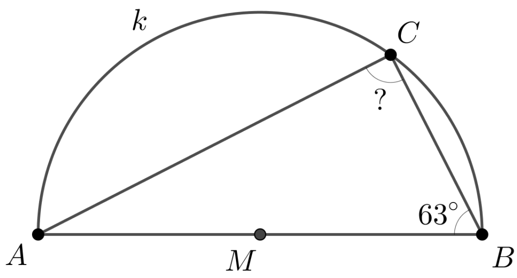
Aufgabe 1. M ist der Mittelpunkt des Halbkreises k mit dem Durchmesser AB und C ein Punkt von k. Im Dreieck MBC ist der Winkel $\angle CBM = 63°$ gegeben.
Wie groß ist der Winkel $\angle MCB$?



Datum: 17. November 2022.

Und noch einmal Winkeljagd

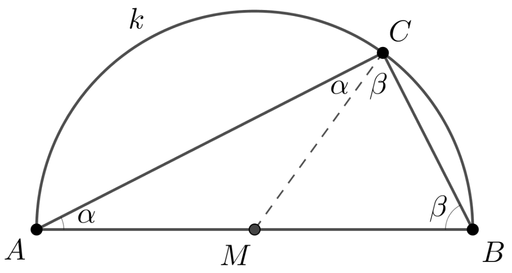
Aufgabe 2. Wie in der vorigen Aufgabe seien M der Mittelpunkt des Halbkreises k mit dem Durchmesser AB und C ein Punkt von k. Wieder sei im Dreieck MBC der Winkel $\angle BMC = 63°$ gegeben. Wie groß ist der Winkel $\angle ACB$?



2. Satz von Thales

Satz von Thales

In der letzten Aufgabe hat sich herausgestellt, dass der gesuchte Winkel ein rechter Winkel war. Nun stellt sich die Frage, ob dies eine besondere Eigenschaft des Ausgangswinkels 63° im Eckpunkt B des Dreiecks ABC ist, oder ob dies ein besonderer Fall eines allgemeineren Ergebnisses ist. Wenn man schon so weit gelesen hat, wird man sicher schon richtig vermuten, dass das Zweitgenannte der Fall ist. Um dies einzusehen, betrachten wir folgende Figur:



Wie in den bisher betrachteten Figuren ist M der Mittelpunkt des Halbkreises k mit dem Durchmesser AB und C hier ein beliebiger Punkt von k. Da M der Mittelpunkt von k ist, sind alle drei Strecken MA, MB und MC Radien von k und daher gleich lang. (Die Strecke MC ist bereits eingezeichnet.) Nun bezeichnen wir den Winkel $\angle BAC$ als α und den Winkel $\angle CBA$ als β. Da $MA = MC$ gilt, ist das Dreieck MAC gleichschenklig und es gilt

$$\angle ACM = \angle MAC = \alpha.$$

Ferner ist wegen $MB = MC$ auch das Dreieck MCB gleichschenklig und es gilt

$$\angle MCB = \angle CBM = \beta.$$

Im Dreieck ABC ist die Summe der Innenwinkel gleich 180°, und es gilt somit

$$180° = \angle BAC + \angle CBA + \angle ACB = \alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 2 \cdot (\alpha + \beta),$$

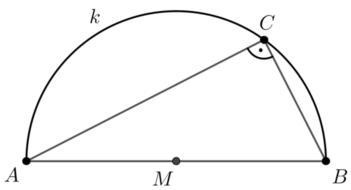
und daher

$$\angle ACB = \alpha + \beta = 90°.$$

Wir sehen, dass der Winkel $\angle ACB$ unabhängig von der Wahl von C auf dem Halbkreis k sicher ein rechter Winkel ist. Offensichtlich gilt dies auch, wenn C auf dem zu k bezüglich AB symmetrischen Halbkreis liegt. Wir sehen, dass der Winkel, unter dem die Strecke AB von jedem Punkt des Kreises mit Durchmesser AB aus gesehen wird, mit Ausnahme von A und B selbst, immer ein rechter Winkel ist.

Satz von Thales

Der Winkel, unter dem die Strecke AB von jedem Punkt des Kreises mit Durchmesser AB aus gesehen wird, mit Ausnahme von A und B selbst, ist immer ein rechter Winkel.
Der Kreis k mit Durchmesser AB wird in diesem Zusammenhang als **Thaleskreis** über die Strecke AB bezeichnet.



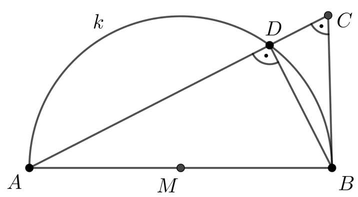
Es ist an dieser Stelle sicher interessant darauf hinzuweisen, dass dieser Begriff in manchen Kulturkreisen anders verwendet wird. Im englischsprachigen Raum wird das Ergebnis meist nicht mit einem Namen zitiert, obwohl es dort schon den Begriff „Thales' Theorem" gibt. Dort ist es vielmehr eher üblich vom „right angle subtended by a diameter" zu sprechen. Außerdem ist es in manchen Ländern, wie etwa bei unseren tschechischen Nachbarn, üblich, den Strahlensatz als „Satz von Thales" zu bezeichnen.

Umkehrung des Satzes von Thales

Besitzt das Dreieck ABC in Eckpunkt C einen rechten Winkel, so liegt C am Thaleskreis über der Strecke AB. Es gibt keine weiteren Punkte mit dieser Eigenschaft.

Beweis. Nehmen wir an, es gäbe einen solchen Punkt C, der nicht auf k liegt.

In nebenstehender Figur ist C außerhalb von k gewählt, aber das Argument gilt ebenso für den Fall, dass C innerhalb von k liegt. Die Verbindungsgerade von A und C schneidet k sicher in einem Punkt $D \neq A$. Liegt C auf der Tangente von k durch A, müssen wir nur die Rollen von A und B in diesem Beweis vertauschen.



Vom Satz von Thales wissen wir, dass $\angle ADB = 90°$ gilt. Wir haben aber angenommen, dass auch $\angle ACB = 90°$ gilt. Dann gibt es aber im Dreieck BCD zwei rechte Winkel, in C und in D, was nicht möglich ist, da die Summe aller drei Winkel in diesem Dreieck dann größer als $180°$ wäre. Es gibt also sicher keinen weiteren Punkt C mit dieser Eigenschaft. □

Sind zwei Punkte A und B gegeben, so ist die Menge aller Punkte C in der Ebene, für die $\angle ACB = 90°$ gilt, genau die Menge aller Punkte des Kreises mit Durchmesser AB, mit Ausnahme der Punkte A und B selbst.