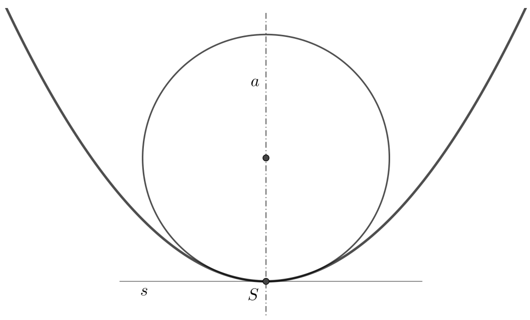
GRUNDLAGENBLATT – SCHEITELKRÜMMUNGSKREIS

Fragen & Antworten auf diesem Grundlagenblatt

- ✓ Wie ist der **Scheitelkrümmungskreis** einer Parabel definiert?
- ✓ Wie bestimmt man die Koordinaten des Mittelpunkts rechnerisch?
- ✓ Wie konstruiert man den Mittelpunkt des Scheitelkrümmungskreises?

Möchte man eine Parabel mit euklidischen Zirkel- und Linealkonstruktionen erzeugen, ist eine Darstellung aufgrund der Konstruktionen vom GB – Parabeldefinition und GB – Parabeltangenten punkt- und tangentenweise bereits bekannt. Eine vollständige Parabel kann natürlich mit den euklidischen Werkzeugen nicht gezeichnet werden, aber es gibt, wie wir es schon für die Ellipse kennen gelernt haben, eine Möglichkeit, die Parabel sehr gut durch einen Kreisbogen im Bereich des Scheitels anzunähern.

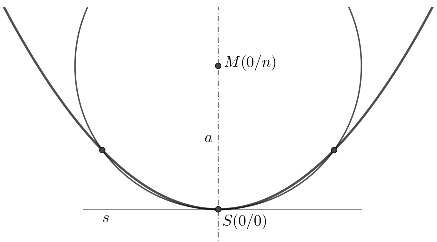
In nebenstehender Figur sehen wir eine Parabel mit ihrer Achse, ihrem Scheitel und ihrer Scheiteltangente, sowie einen Kreis, der die Parabel im Bereich der Scheitel annähert.

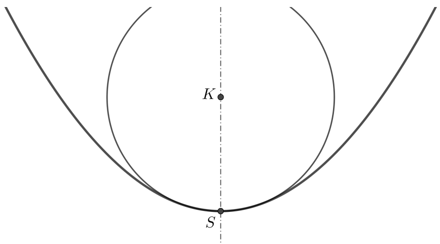


Um diese Figur besser zu verstehen, müssen wir, wie schon bei der Ellipse, die Definition des Scheitelkrümmungskreises und seine Konstruktion nun etwas näher betrachten.

DEFINITION DES SCHEITELKRÜMMUNGSKREISES

Aufgrund der gemeinsamen Symmetrieachse, hat jeder Kreis mit Mittelpunkt auf der Achse a einer Parabel, die durch den Scheitel S der Parabel geht, in S eine gemeinsame Tangente mit der Ellipse.





Datum: 17. November 2022.

Links sehen wir diese Situation dargestellt. Der Kreis mit Mittelpunkt M auf der Achse a der Parabel berührt die Parabel in S, da beide Kurven in S eine Tangente s normal zu a besitzen. Nehmen wir an, die Parabel sei in (zweiter) Hauptlage, so hat der Mittelpunkt M die Koordinaten $M(0/n)$. Ist M ausreichend weit von S entfernt, so schneidet der Kreis die Parabel in zwei weiteren Punkten, die in der Figur auch angedeutet sind. Es ist aber klar, dass dies nicht der Fall sein wird, wenn M sich sehr nah am Punkt S befindet. In diesem Fall liegt der Kreis zur Gänze im „Inneren" der Parabel (mit Ausnahme des gemeinsamen Punktes S, natürlich.)

Scheitelkrümmungskreis

Stellen wir uns also vor, der Punkt M würde, ausgehend von der links abgebildeten Lage, allmählich auf der Achse der Parabel nach unten wandern. Irgendwo wird es zum Übergang von der ersten zur zweiten Situation kommen. Mit anderen Worten, die zwei weiteren Schnittpunkte des Kreises mit der Parabel fallen dann in der Übergangssituation genau mit S zusammen. Wir bezeichnen die Lage von M zu diesem Zeitpunkt als K, und nennen den Kreis mit Mittelpunkt K durch S den **Scheitelkrümmungskreis** der Parabel.

Da dieser Kreis mit der Parabel „zusammengerückte" Punkte gemeinsam hat, ist es anschaulich plausibel, dass der Kreis die Parabel in der Umgebung von S grafisch sehr gut annähert.

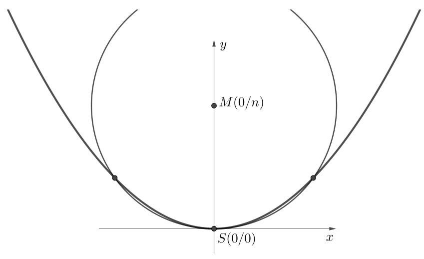
Eine mathematisch korrekte Präzisierung dieser Idee ist mit Hilfe von Mitteln aus der Differentialgeometrie möglich.

Für unsere Zwecke ist aber dieser anschauliche Zugang ausreichend.

Wie schon bei der Ellipse sagen wir, dass der Scheitelkrümmungskreis mit der Parabel in S *hyperoskuliert*.

Berechnung der Mittelpunktskoordinate

Wir nehmen an, die Parabel mit der Gleichung $x^2 = 2py$ werde mit einem Kreis durch den Scheitel $S(0/0)$ mit dem Mittelpunkt $M(0/n)$ auf der y-Achse, also der Achse der Parabel, geschnitten. Da der Radius dieses Kreises gleich n ist, lautet die Gleichung dieses Kreises dann



$$x^2 + (y-n)^2 = n^2,$$

Diese Gleichung ist gleichwertig mit $x^2+y^2-2ny+n^2 = n^2$ oder $x^2 = 2ny-y^2$. Für jeden Schnittpunkt (x/y) der Parabel mit diesem Kreis müssen beide Gleichungen gelten, also

$$x^2 = 2py \quad \text{und} \quad x^2 = 2ny - y^2.$$

Für die y-Koordinaten der Schnittpunkte gilt also:

$$2py = 2ny - y^2$$
$$\iff y^2 - 2y \cdot (n - p) = 0.$$

Ist nun $M = K$ der Mittelpunkt des Scheitelkrümmungskreises, so fallen alle Schnittpunkte zusammen. Das bedeutet, dass diese quadratische Gleichung genau eine Lösung hat. Da $y = 0$ jedenfalls ein Lösung ist, muss die zweite Lösung $n - p$ ebenfalls gleich 0 sein, und wir sehen, dass in diesem Fall $n = p$ gilt.

Koordinaten des Scheitelkrümmungskreises

Der Mittelpunkt K des Scheitelkrümmungskreises hat also die **Koordinaten** $K(0/p)$.

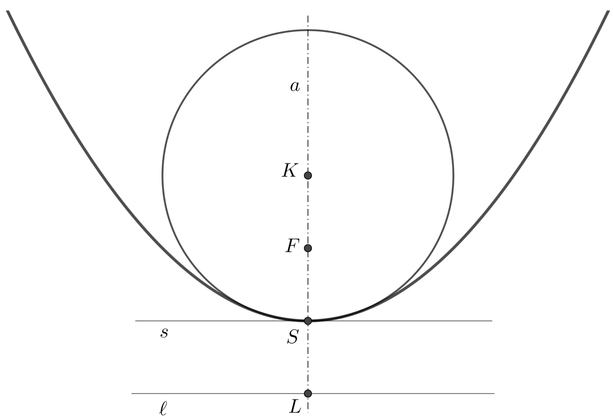
Parabelscheitelkrümmungskreiskonstruktion

Konstruktion 1 (Konstruktion des Mittelpunkts des Scheitelkrümmungskreises einer Parabel)**.** Gegeben sei eine Parabel mit Scheitel S, Brennpunkt F und Leitlinie ℓ. Konstruiere den Mittelpunkte K des Scheitelkrümmungskreises durch S.

Lösung.

1) Wir wissen, dass der Abstand von S zu F gleich $\frac{p}{2}$ ist, und der Abstand von S zu K gleich p. Der Krümmungskreismittelpunkt K liegt also symmetrisch zu S bezüglich F.

2) Da wir auch wissen, dass der Abstand von S zu F gleich dem Abstand von S zum Schnittpunkt der Leitlinie ℓ mit der Achse a ist, ist auch der Abstand von F zu L gleich groß wie der Abstand von S zu K, nämlich p.



Mit anderen Worten, der Radius des Parabelscheitelkrümmungskreises ist gleich dem Normalabstand des Brennpunkts zur Leitlinie. □