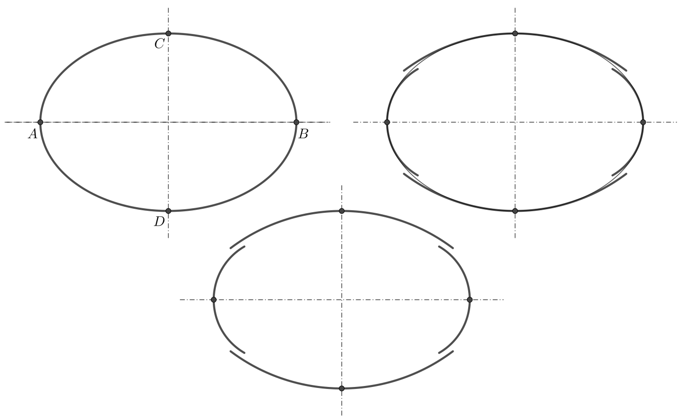
GRUNDLAGENBLATT – SCHEITELKRÜMMUNGSKREISE

Fragen & Antworten auf diesem Grundlagenblatt

- ✓ Wie sind die **Scheitelkrümmungskreise** einer Ellipse definiert?
- ✓ Wie bestimmt man die Koordinaten der Scheitelkrümmungskreise rechnerisch?
- ✓ Wie konstruiert man die Mittelpunkte der Scheitelkrümmungskreise?
- ✓ Mithilfe welcher Kurven kann man Ellipsen näherungsweise darstellen?
- ✓ Wie kann man Ovale und somit eine Näherung an eine Ellipse konstruieren?

Möchte man eine Ellipse mit klassischen euklidischen Zirkel- und Linealkonstruktionen erzeugen, ist eine Darstellung aufgrund der Konstruktionen vom GB – Ellipsendefinition und GB – Ellipsentangenten punkt- und tangentenweise bereits bekannt. Eine vollständige Ellipse kann natürlich mit den euklidischen Werkzeugen nicht gezeichnet werden, aber es gibt Möglichkeiten, die Ellipse sehr gut durch Kreisbögen anzunähern. Eine derartige Möglichkeit ist durch die Verwendung der **Scheitelkrümmungskreise** gegeben.

Hier sehen wir links oben eine Ellipse mit ihren Achsen und Scheiteln und rechts oben dieselbe Ellipse, sowie die Bögen der Kreise, die die Ellipse im Bereich der Scheitel annähern. Im unteren Bild sind schließlich nur diese Bögen gezeichnet, und man erkennt, dass diese vier Kreisbögen allein den Verlauf der Ellipse sehr gut annähern.

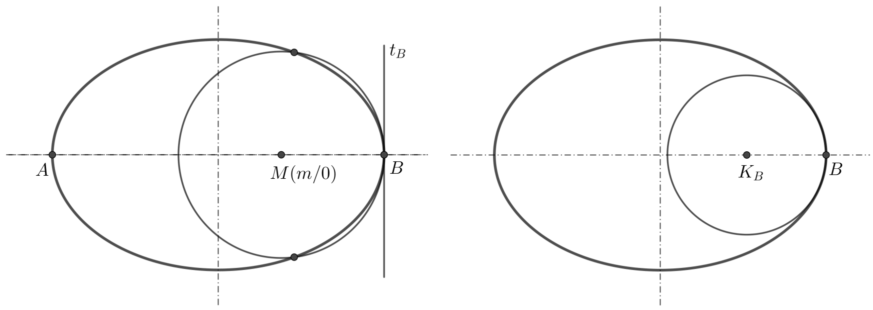


Um diese Figur besser zu verstehen, müssen wir die Definition der Scheitelkrümmungskreise und ihre Konstruktion nun etwas näher betrachten.

Datum: 17. November 2022.

Definition der Scheitelkrümmungskreise

Aufgrund der gemeinsamen Symmetrieachse, hat jeder Kreis mit Mittelpunkt auf der Hauptachse AB einer Ellipse, die durch einen Scheitel der Ellipse geht (wir wählen in nachfolgender Figur exemplarisch den Scheitel B) in B eine gemeinsame Tangente mit der Ellipse.



Links sehen wir diese Situation in obiger Figur dargestellt. Der Kreis mit Mittelpunkt M auf der Hauptachse AB der Ellipse berührt die Ellipse in B, da beide Kurven in B eine Tangente t_B normal zu AB besitzen. Nehmen wir an, die Ellipse sei in erster Hauptlage, so hat der Mittelpunkt M die Koordinaten $M(m/0)$. Ist M ausreichend weit von B entfernt (links von B und nicht zu weit), so schneidet der Kreis die Ellipse in zwei weiteren Punkten, die in der Figur auch angedeutet sind. Es ist aber klar, dass dies nicht der Fall sein wird, wenn M sich sehr nah am Punkt B befindet. In diesem Fall liegt der Kreis zur Gänze im Inneren der Ellipse (mit Ausnahme des gemeinsamen Punktes B, natürlich.)

Hauptscheitelkrümmungskreis

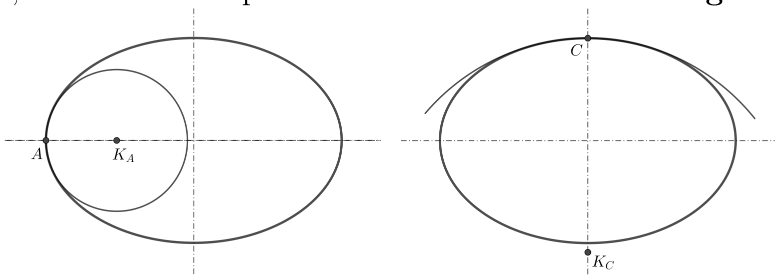
Stellen wir uns also vor, der Punkt M würde, ausgehend von der links abgebildeten Lage, allmählich auf der Hauptachse der Ellipse nach rechts wandern. Irgendwo wird es zum Übergang von der ersten zur zweiten Situation kommen. Mit anderen Worten, die zwei weiteren Schnittpunkte des Kreises mit der Ellipse fallen dann in der Übergangssituation genau mit B zusammen.
Wir bezeichnen die Lage von M zu diesem Zeitpunkt als K_B, und nennen den Kreis mit Mittelpunkt K_B durch B den **Hauptscheitelkrümmungskreis** der Ellipse in B.

Da dieser Kreis mit der Ellipse „zusammengerückte“ Punkte gemeinsam hat, ist es anschaulich plausibel, dass der Kreis die Ellipse in der Umgebung von B sehr gut annähert.

Eine mathematisch korrekte Präzisierung dieser Idee ist mit Hilfe von Mitteln aus der Differentialgeometrie möglich.

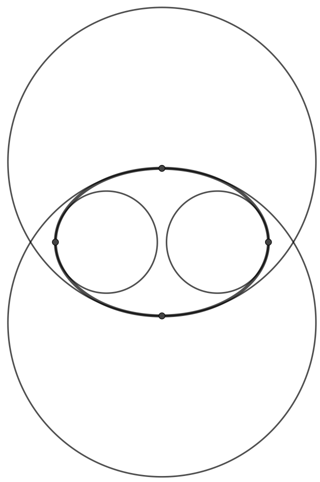
Für unsere Zwecke ist aber dieser anschauliche Zugang ausreichend.

Aufgrund der Symmetrie gibt es einen weiteren Hauptscheitelkrümmungskreis durch A mit demselben Radius. Außerdem kann man die analoge Überlegung auch für Kreise durch einen Nebenscheitel durchführen, was zum Konzept des **Nebenscheitelkrümmungskreises** führt.



Im linken Bild sehen wir den Hauptscheitelkrümmungskreis durch A. Dieser liegt symmetrisch zu jenem durch B bezüglich der Ellipsennebenachse. Im rechten Bild sehen wir einen Bogen des Nebenscheitelkrümmungskreises durch C, wobei K_C der Mittelpunkt dieses Kreises ist.

Wir bemerken, dass die beiden Hauptscheitelkrümmungskreise (bis auf die Berührpunkte) immer zur Gänze innerhalb der Ellipse liegen. Analog liegt die Ellipse immer (bis auf den jeweiligen Berührpunkt) immer im Inneren beider Nebenscheitelkrümmungskreise. Diese relativen Lagen sind in nebenstehender Figur abgebildet.



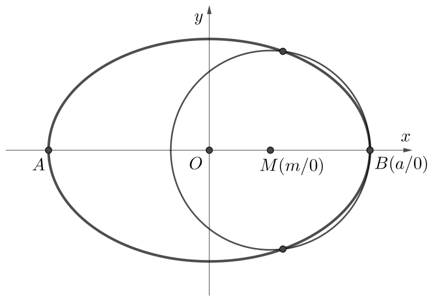
Die besondere Lage jedes Scheitelkrümmungskreises relativ zur Ellipse bekommt auch einen Namen; man sagt der Scheitelkrümmungskreis *hyperoskuliert* mit der Ellipse.

Berechnung der Mittelpunktskoordinaten

Um eine euklidische Konstruktion der Scheitelkrümmungskreise abzuleiten, wird es sich als hilfreich herausstellen, zuerst die Koordinaten deren Mittelpunkte zu bestimmen.

Wir nehmen an, die Ellipse mit der Gleichung $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ werde mit einem Kreis durch den Hauptscheitel $B(a/0)$ mit dem Mittelpunkt $M(m/0)$ auf der x-Achse, also der Hauptachse der Ellipse, geschnitten. Da der Radius dieses Kreises gleich $a - m$ ist, lautet die Gleichung dieses Kreises dann

$$(x - m)^2 + y^2 = (a - m)^2.$$



Diese Gleichung ist gleichwertig mit $x^2 - 2xm + m^2 + y^2 = a^2 - 2am + m^2$ oder

$$y^2 = -x^2 + 2xm + a^2 - 2am.$$

Für jeden Schnittpunkt (x/y) der Ellipse mit diesem Kreis müssen beide Gleichungen gelten, also

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \text{und} \quad y^2 = -x^2 + 2xm + a^2 - 2am.$$

Setzen wir in der ersten Gleichung für y^2 den Ausdruck von der Kreisgleichung ein, sehen wir, dass Folgendes für die x-Koordinaten der Schnittpunkte gelten muss:

$$\begin{aligned} & b^2x^2 + a^2 \cdot (-x^2 + 2xm + a^2 - 2am) = a^2b^2 \\ \Longleftrightarrow\ & b^2x^2 - a^2x^2 + 2a^2mx + a^4 - 2a^3m - a^2b^2 = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & (b^2 - a^2) \cdot x^2 + 2a^2m \cdot x + (a^4 - 2a^3m - a^2b^2) = 0. \end{aligned}$$

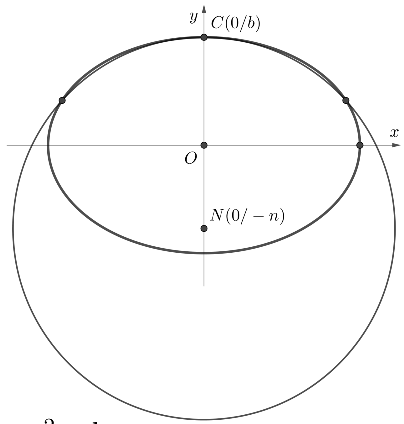
Ist nun $M = K_B$ der Mittelpunkt des Hauptscheitelkrümmungskreises, so fallen alle Schnittpunkte zusammen. Das bedeutet, dass diese quadratische Gleichung genau eine Lösung hat, und dies ist wiederum damit gleichbedeutend, dass die Diskriminante der quadratischen Gleichung gleich 0 ist. Es gilt also:

$$\begin{aligned} D = 0 \ & \Longleftrightarrow (2a^2m)^2 = 4(b^2 - a^2)(a^4 - 2a^3m - a^2b^2) \\ & \Longleftrightarrow 4a^4m^2 - 4(a^2 - b^2) \cdot 2a^3 \cdot m + 4(a^2 - b^2)(a^4 - a^2b^2) = 0 \\ & \Longleftrightarrow a^2m^2 - 2am(a^2 - b^2) + (a^2 - b^2)^2 = 0 \\ & \Longleftrightarrow (am - (a^2 - b^2))^2 = 0 \\ & \Longleftrightarrow m = \frac{a^2 - b^2}{a} \end{aligned}$$

Koordinaten der Hauptscheitelkrümmungskreise

Wir sehen also, dass der Mittelpunkt K_B des Hauptscheitelkrümmungskreises durch B die Koordinaten $K_B(\frac{a^2-b^2}{a}/0)$ hat. Aufgrund der Symmetrie, erhalten wir auch sofort den Mittelpunkt des Krümmungskreises durch A als $K_A(-\frac{a^2-b^2}{a}/0)$.

Nun können wir für die Nebenscheitelkrümmungskreismittelpunkte vollkommen analog vorgehen.



Wir nehmen an, die Ellipse mit der Gleichung $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ werde mit einem Kreis durch den Nebenscheitel $C(0/b)$ mit dem Mittelpunkt $N(-n/0)$ auf der y-Achse, also der Nebenachse der Ellipse, geschnitten. Da der Radius dieses Kreises gleich $b+n$ ist, lautet die Gleichung dieses Kreises dann

$$x^2 + (y+n)^2 = (b+n)^2.$$

Diese Gleichung ist gleichwertig mit $x^2 + y^2 + 2yn + n^2 = b^2 + 2bn + n^2$ oder

$$x^2 = -y^2 - 2yn + b^2 + 2bn.$$

Für jeden Schnittpunkt (x/y) der Ellipse mit diesem Kreis müssen wie vorhin beide Gleichungen gelten, also

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \text{und} \quad x^2 = -y^2 - 2yn + b^2 + 2bn.$$

Setzen wir in der ersten Gleichung für x^2 den Ausdruck von der Kreisgleichung ein, sehen wir, dass Folgendes für die y-Koordinaten der Schnittpunkte gelten muss:

$$b^2 \cdot (-y^2 - 2yn + b^2 + 2bn) + a^2y^2 = a^2b^2 \iff a^2y^2 - b^2y^2 - 2b^2ny + b^4 + 2b^3n - a^2b^2 = 0$$
$$\iff (a^2 - b^2) \cdot y^2 - 2b^2n \cdot y + (b^4 + 2b^3n - a^2b^2) = 0.$$

Ist nun $N = K_C$ der Mittelpunkt des Nebenscheitelkrümmungskreises, so *fallen alle Schnittpunkte zusammen*. Das bedeutet, dass diese *quadratische Gleichung genau eine Lösung* hat, und dies ist wiederum damit gleichbedeutend, dass die *Diskriminante der quadratischen Gleichung gleich 0* ist.

Es gilt also:
$$\begin{aligned} D = 0 &\iff (-2b^2n)^2 = 4(a^2 - b^2)(b^4 + 2b^3n - a^2b^2) \\ &\iff 4b^4n^2 - 4(a^2 - b^2) \cdot 2b^3 \cdot n + 4(a^2 - b^2)(a^2b^2 - b^4) = 0 \\ &\iff b^2n^2 - 2bn(a^2 - b^2) + (a^2 - b^2)^2 = 0 \\ &\iff (bn - (a^2 - b^2))^2 = 0 \\ &\iff n = \frac{a^2 - b^2}{b} \end{aligned}$$

Koordinaten der Nebenscheitelkrümmungskreise

Wir sehen also, dass der Mittelpunkt K_C des Nebenscheitelkrümmungskreises durch C die Koordinaten $K_C(0/-\frac{a^2-b^2}{b})$ hat. Aufgrund der Symmetrie, erhalten wir auch sofort den Mittelpunkt des Krümmungskreises durch D als $K_D(0/\frac{a^2-b^2}{b})$.

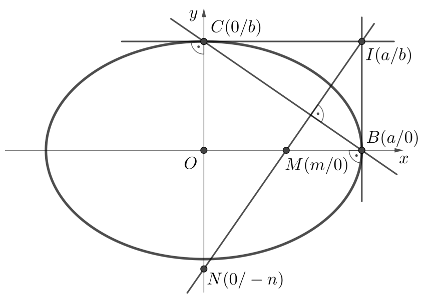
Ellipsenscheitelkrümmungskreismittelpunktskonstruktion

Jetzt sind wir so weit, dass wir eine sehr einfache Konstruktion der Scheitelkrümmungskreise einer durch ihre Achsenlängen gegebenen Ellipse ableiten können. Die Konstruktion wird sich als wesentlich einfacher herausstellen als es diese vorbereitenden Schritte waren. Die Komplexität der Vorbereitung passt aber gut zur Überschrift dieses Abschnitts, denn dieses zusammengesetzte Hauptwort ist mit seinen 54 Buchstaben vermutlich das längste natürlich vorkommende, das man in der Elementarmathematik je zu Gesicht bekommen wird.

Konstruktion 1 (Konstruktion des Mittelpunkts des Scheitelkrümmungskreises einer Ellipse)**.** Gegeben sei eine Ellipse mit Mittelpunkt O, Hauptachsenlänge a und Nebenachsenlänge B. Konstruiere die Mittelpunkte K_B und K_C der Scheitelkrümmungskreise durch B bzw. C.

Lösung.

1) Wir konstruieren zuerst die Normale zur Hauptachse durch B und die Normale zur Nebenachse durch C. (Natürlich kann dieses Paar von Haupt- und Nebenscheiteln aufgrund der Symmetrie durch jedes andere ersetzt werden.) Diese beiden Normalen schneiden einander im Hilfspunkt I mit den Koordinaten $I(a/b)$.



2) Anschließend konstruieren wir die Normale zur Verbindungsgeraden von B und C durch I. Den Schnittpunkt dieser Normalen mit der Hauptachse bezeichnen wir mit M (mit den Koordinaten $M(m/0)$) und den Schnittpunkt mit der Nebenachse bezeichnen wir mit N (mit den Koordinaten $N(0/-n)$).

Wir wollen jetzt nachweisen, dass $m = \frac{a^2-b^2}{a}$ und $n = \frac{a^2-b^2}{b}$ gilt, womit wir $M = K_B$ und $N = K_C$ konstruiert haben.

Zu diesem Zweck bemerken wir, dass die beiden Winkel $\angle MIB$ und $\angle CBO$ wegen $CB \perp MI$ und $BO \perp BI$ Normalwinkel sind, und somit gleich groß. Die beiden rechtwinkeligen Dreiecke COB und MBI sind daher ähnlich, und es gilt

$$\frac{MB}{IB} = \frac{CO}{OB} \Rightarrow \frac{a-m}{b} = \frac{b}{a}.$$

Dies ist gleichwertig mit $a - m = \frac{b^2}{a}$ bzw. $m = a - \frac{b^2}{a} = \frac{a^2-b^2}{a}$, womit der erste Teil der Behauptung gezeigt ist. Es gilt also wie behauptet $M = K_B$.

Analog bemerken wir, dass auch die beiden Winkel $\angle INC$ und $\angle CBO$ wegen $CB \perp NI$ und $BO \perp CN$ Normalwinkel sind, und somit gleich groß. Die beiden rechtwinkeligen Dreiecke COB und NCI

sind daher ebenfalls ähnlich, und es gilt

$$\frac{CI}{CN} = \frac{CO}{OB} \Rightarrow \frac{a}{b+n} = \frac{b}{a}.$$

Dies ist gleichwertig mit $a^2 = b^2 + bn$ bzw. $n = \frac{a^2-b^2}{b}$, womit auch der zweite Teil der Behauptung gezeigt ist. Es gilt also auch wie behauptet $N = K_C$. □

Näherungsovale

In diesem Abschnitt haben wir uns bisher mit Kreisen beschäftigt, die den Kurvenverlauf einer Ellipse jeweils im Bereich eines Scheitels annähern.

Ovale

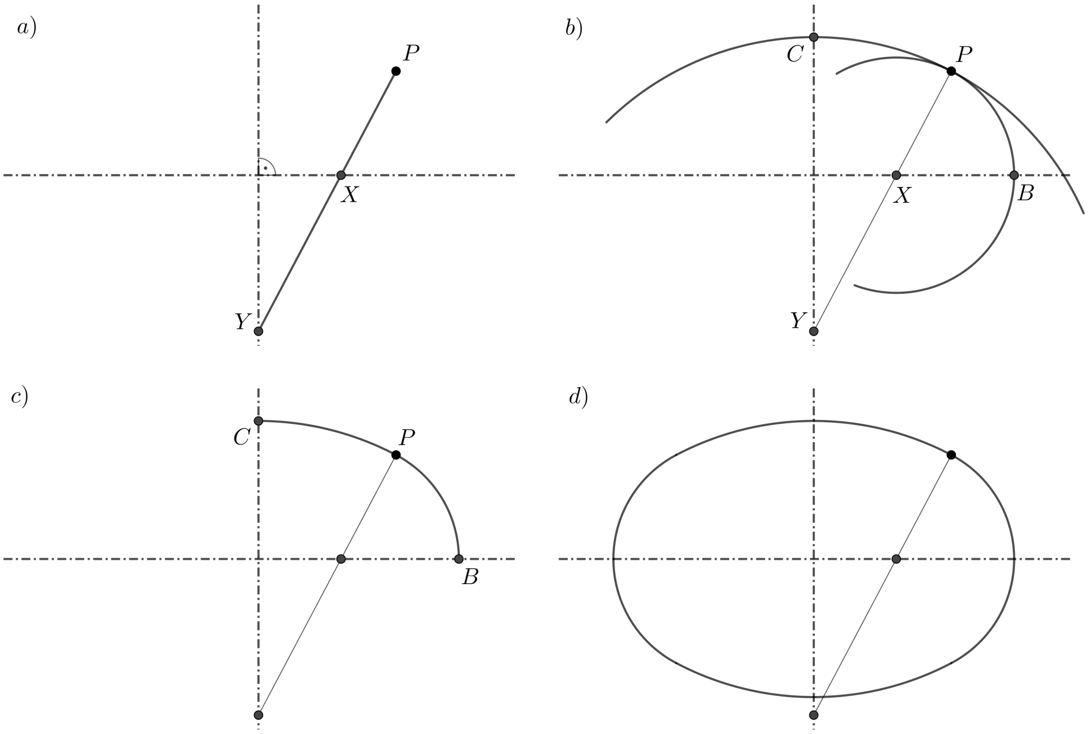
Es stellt sich in diesem Zusammenhang die Frage, ob es Kreisbögen gibt, die den Kurvenverlauf insofern noch „besser“ annähern, als sie berührend ineinander übergehen. Wenn es so etwas gibt, können wir *mit dem Zirkel Kurven zeichnen, die grafisch annähernd den Verlauf einer Ellipse imitieren.* Derartige Kurven bezeichnet man als **Ovale**. Dies sind **geschlossene**, **konvexe** (also, durchgehend nach außen gewölbte) **Kurven**, die ebenso wie Ellipsen **zwei zueinander normale Symmetrieachsen** besitzen.

Konstruktion 2 (Konstruktion eines Ovals als Annäherung einer Ellipse)**.** Gegeben seien zwei Symmetrieachsen (d.h. zwei zueinander normale Achsen. Konstruiere ein Oval durch einen beliebigen Punkt P, das eine Ellipse annähert.

Lösung. In nachstehender Figur sehen wir eine einfache Konstruktion in vier Schritten, um ein derartiges Oval zu konstruieren.

1) In a) sehen wir zwei zueinander normale Achsen, die wir als Symmetrieachsen unseres Ovals verwenden möchten. Auf diesen wählen wir die Punkte X und Y beliebig. Weiters wählen wir einen beliebigen Punkt P auf der Verlängerung der Strecke YX jenseits von X.

2) In b) zeichnen wir den Kreis mit Mittelpunkt X durch P. Wir bezeichnen den Schnittpunkt dieses Kreises mit der waagrechten Symmetrieachse rechts von X als B. Ebenso zeichnen wir den Kreis mit Mittelpunkt Y durch P und bezeichnen den Schnittpunkt dieses Kreises mit der senkrechten Symmetrieachse oberhalb von Y als C.



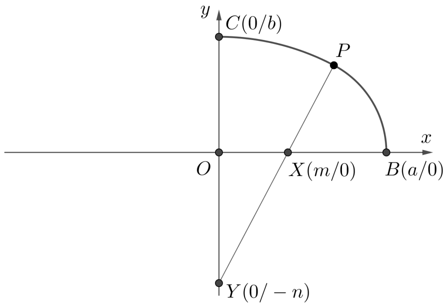
3) In c) haben wir die Teile dieser beiden Kreisbögen entfernt, die außerhalb der Bögen PB bzw. PC liegen. Diese beiden Bögen bilden zusammen einen Viertelbogen des erwünschten Ovals.

4) In d) schließlich haben wir diesen Viertelbogen an den beiden Symmetrieachen gespiegelt, um die Kurve zu vervollständigen.

□

In dieser Konstruktion 2 ergeben sich die „Achsenlängen" der resultierenden Kurve aus der relativen Wahl der Punkte X, Y und P.

Wir möchten aber auch die Möglichkeit haben, eine *Ellipse mit vorgegeben Achsenlängen* a und b durch ein *Oval anzunähern.* Um die Punkte X, Y und P geeignet wählen zu können, betrachten wir nebenstehende Figur.



Wir verwenden ähnlich Bezeichnungen zu den bisher eingeführten. Bei vorgegebenen Werten von a und b seien $B(a/0)$ und $C(0/b)$ die Scheitel der gewünschten Kurve. Punkte X, Y und P seien wie in Konstruktion 2, wobei wir die Koordinaten $X(m/0)$ und $Y(0/-n)$ verwenden. Im rechtwinkeligen Dreieck OYX gilt $XY^2 = OX^2 + OY^2$, und somit $XY^2 = m^2 + n^2$ bzw. $XY = \sqrt{m^2+n^2}$. Da P und B beide auf demselben Kreis mit Mittelpunkt X liegen, gilt $XP = XB = a - m$, und somit $YP = XY + XP = \sqrt{m^2+n^2} + (a-m)$. Da P und C beide auf demselben Kreis mit Mittelpunkt Y liegen, gilt aber auch $YC = YP$. Da $YP = b + n$ gilt, erhalten wir die Gleichung

$$b + n = \sqrt{m^2+n^2} + (a-m).$$

Dies ist gleichwertig mit

$$\begin{aligned}
& m + n - (a-b) = \sqrt{m^2+n^2} \\
\iff & m^2 + n^2 - (a-b)^2 + 2mn - 2m(a-b) - 2n(a-b) = m^2 + n^2 \\
\iff & 2n \cdot (m - (a-b)) = 2m(a-b) - (a-b)^2 \\
\iff & n = \frac{2m(a-b) - (a-b)^2}{2m - 2(a-b)}.
\end{aligned}$$

Diesen Ausdruck können wir etwas geschickter anschreiben als

$$\begin{aligned}
n &= \frac{2m(a-b)-(a-b)^2}{2m-2(a-b)} = \frac{(a-b)(2m-2(a-b))}{2m-2(a-b)} + \frac{(a-b)^2}{2m-2(a-b)} = \\
&= (a-b) + (a-b) \cdot \frac{a-b}{2m-2(a-b)} = (a-b)\left(1 + \frac{1}{2\left(\frac{m}{a-b} - 1\right)}\right).
\end{aligned}$$

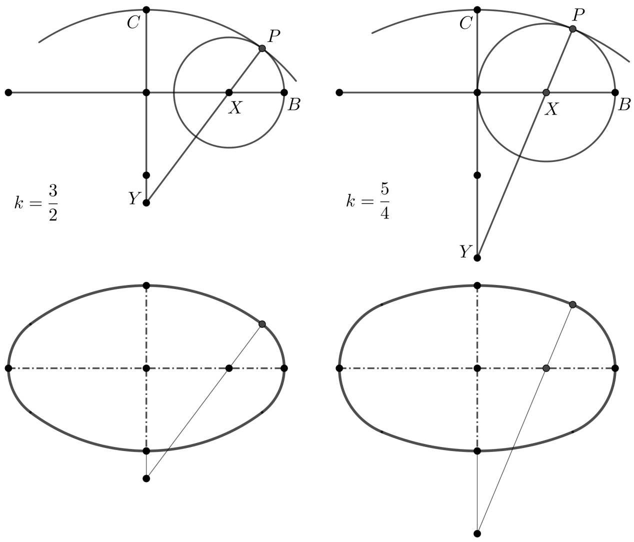
Wählen wir also m als ein Vielfaches von $a-b$ in der Form $m = k \cdot (a-b)$, so erhalten wir auch n als ein Vielfaches von $a-b$ durch

$$n = (a-b)\left(1 + \frac{1}{2\left(\frac{k(a-b)}{a-b} - 1\right)}\right) = (a-b)\left(1 + \frac{1}{2(k-1)}\right) = (a-b) \cdot \frac{2k-1}{2k-2}.$$

Ovale mit vorgegebenen Achsenlängen und Faktor k

Dies ermöglicht uns nunmehr die Konstruktion von Ovalen nach Vorgabe von a, b und einem Faktor k. In nachstehender Figur ist das Ergebnis dargestellt für $a = 10$ und $b = 6$, wobei links der Faktor $k = \frac{3}{2}$ verwendet wurde und rechts der Faktor $k = \frac{5}{4}$.
Für $a = 10$, $b = 6$ und $k = \frac{3}{2}$ erhalten wir $m = \frac{3}{2} \cdot (10 - 6) = 6$ und $n = (10 - 6) \cdot \frac{2\frac{3}{2}-1}{2\frac{3}{2}-2} = 8$, und für $a = 10$, $b = 6$ und $k = \frac{5}{4}$ erhalten wir $m = \frac{5}{4} \cdot (10 - 6) = 65$ und $n = (10 - 6) \cdot \frac{2\frac{5}{4}-1}{2\frac{5}{4}-2} = 12$.

In beiden Fällen zeichnen wir zuerst die Punkte B, C, X und Y. Der Punkt P ergibt sich als gemeinsamer Schnittpunkt der Geraden XY mit den Kreisen mit Mittelpunkt X durch B bzw. mit Mittelpunkt Y durch C.



Die optische Wirkung der beiden resultierenden Ovale ist durchaus unterschiedlich. Außerdem sieht man sofort, dass diese Kurven auch andere Krümmungen als die Ellipse mit denselben Werten von a und b hat, die zum Vergleich unten zu sehen ist.