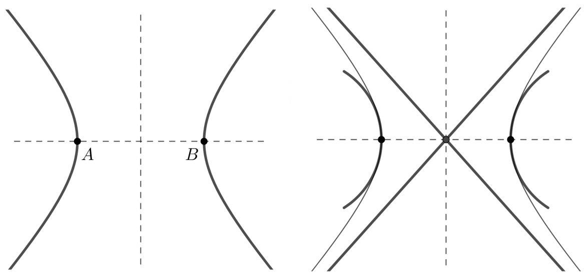
GRUNDLAGENBLATT – SCHEITELKRÜMMUNGSKREISE DER HYPERBEL

Fragen & Antworten auf diesem Grundlagenblatt

- ✓ Wie sind die **Scheitelkrümmungskreise** einer Hyperbel definiert?
- ✓ Wie bestimmt man die Koordinaten der Scheitelkrümmungskreise rechnerisch?
- ✓ Wie konstruiert man die Mittelpunkte der Scheitelkrümmungskreise?
- ✓ Mithilfe welcher Kurven kann man Hyperbeln näherungsweise darstellen?

Möchte man eine Hyperbel mit klassischen euklidischen Zirkel- und Linealkonstruktionen erzeugen, ist eine Darstellung aufgrund der Konstruktionen vom GB – Hyperbeldefinition und GB – Hyperbeltangenten punkt- und tangentenweise bereits bekannt. Eine vollständige Hyperbel kann natürlich mit den euklidischen Werkzeugen nicht gezeichnet werden, aber es gibt Möglichkeiten, die Hyperbel sehr gut durch Kreisbögen und Geraden anzunähern. Eine derartige Möglichkeit ist durch die Verwendung der *Scheitelkrümmungskreise* in Kombination mit den Asymptoten, die in GB – Hyperbelgleichung eingeführt wurden, gegeben.

Hier sehen wir links eine Hyperbel mit ihren Achsen und Scheiteln und rechts dieselbe Hyperbel, sowie die Bögen der Kreise, die die Hyperbel im Bereich der Scheitel annähern und die Asymptoten der Hyperbel. Man erkennt, dass diese Elemente allein den Verlauf der Hyperbel schon einigermaßen grafisch annähern.

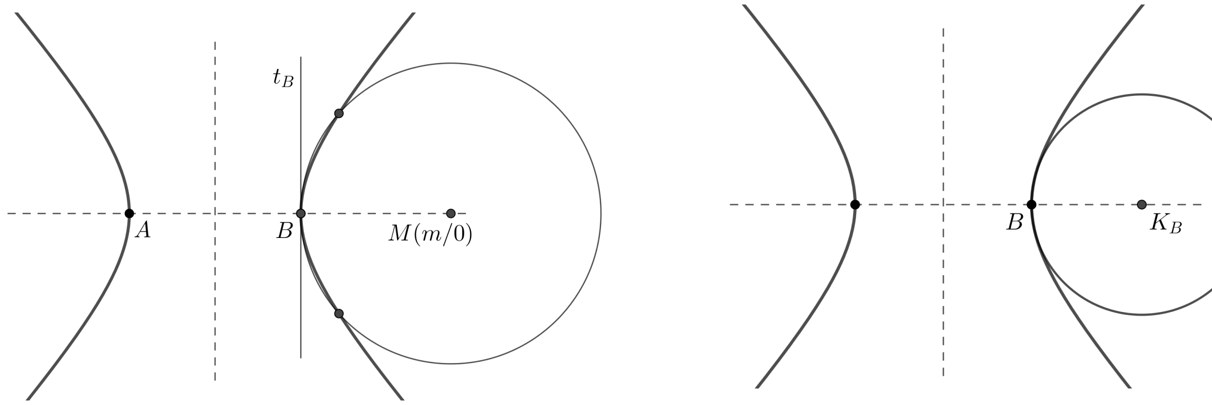


Am GB – Hyperbelgleichung wurde bereits argumentiert, dass die Asymptoten die Hyperbel im Bereich jenseits des Mittelpunktes sehr gut grafisch annähern. Um die Kreisbögen in dieser Figur besser zu verstehen, müssen wir, wie schon bei der Ellipse, die Definition der Scheitelkrümmungskreise und ihre Konstruktion nun etwas näher betrachten.

Definition der Scheitelkrümmungskreise

Aufgrund der gemeinsamen Symmetrieachse, hat jeder Kreis mit Mittelpunkt auf der Hauptachse AB einer Hyperbel, die durch einen Scheitel der Hyperbel geht (wir wählen in nachfolgender Figur exemplarisch den Scheitel B) in B eine gemeinsame Tangente mit der Hyperbel.

Datum: 17. November 2022.



Links sehen wir diese Situation in obiger Figur dargestellt.Der Kreis mit Mittelpunkt M auf der Hauptachse AB der Hyperbel berührt die Hyperbel in B, da beide Kurven in B eine Tangente t_B normal zu AB besitzen. Nehmen wir an, die Hyperbel sei in erster Hauptlage, so hat der Mittelpunkt M die Koordinaten $M(m/0)$. Ist M ausreichend weit von B entfernt (rechts von B und ausreichend weit von B entfernt), so schneidet der Kreis die Hyperbel in zwei weiteren Punkten, die in der Figur auch angedeutet sind. Es ist aber klar, dass dies nicht der Fall sein wird, wenn M sich sehr nah am Punkt B befindet. In diesem Fall hat der Kreis nur einen einzigen Punkt mit der Hyperbel gemeinsam, nämlich B.

Hauptscheitelkrümmungskreis

Stellen wir uns also vor, der Punkt M würde, ausgehend von der links abgebildeten Lage, allmählich auf der Hauptachse der Hyperbel nach links wandern. Irgendwo wird es zum Übergang von der ersten zur zweiten Situation kommen. Mit anderen Worten, die zwei weiteren Schnittpunkte des Kreises mit der Hyperbel fallen dann in der Übergangssituation genau mit B zusammen. Wir bezeichnen die Lage von M zu diesem Zeitpunkt als K_B, und nennen den Kreis mit Mittelpunkt K_B durch B den **Hauptscheitelkrümmungskreis** der Hyperbel in B.

Da dieser Kreis mit der Hyperbel „zusammengerückte“ Punkte gemeinsam hat, ist es anschaulich plausibel, dass der Kreis die Hyperbel in der Umgebung von B sehr gut annähert.

Wie es schon für die Ellipse angedeutet wurde, ist eine mathematisch korrekte Präzisierung dieser Idee mit Hilfe von Mitteln aus der Differentialgeometrie auch im Fall der Hyperbel möglich. Für unsere Zwecke ist aber dieser anschauliche Zugang wiederum ausreichend.

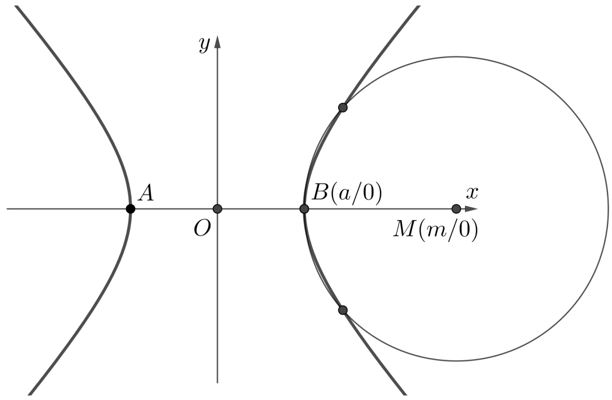
Aufgrund der Symmetrie gibt es einen weiteren Hauptscheitelkrümmungskreis durch A mit demselben Radius. Wie im Fall der Ellipse sagen wir, dass die Scheitelkrümmungskreise mit der Hyperbel im jeweiligen Berührscheitel **hyperoskulieren**.

Berechnung der Mittelpunktskoordinaten

Um eine euklidische Konstruktion der Scheitelkrümmungskreise abzuleiten, wird es sich als hilfreich herausstellen, zuerst die Koordinaten deren Mittelpunkte zu bestimmen.

Wir nehmen an, die Hyperbel mit der Gleichung $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ werde mit einem Kreis durch den Hauptscheitel $B(a/0)$ mit dem Mittelpunkt $M(m/0)$ auf der x-Achse, also der Hauptachse der Hyperbel, geschnitten.Da der Radius dieses Kreises gleich $a - m$ ist, lautet die Gleichung dieses Kreises dann

$$(x - m)^2 + y^2 = (m - a)^2.$$



Diese Gleichung ist gleichwertig mit $x^2 - 2xm + m^2 + y^2 = m^2 - 2am + a^2$ oder

$$y^2 = -x^2 + 2xm + a^2 - 2am.$$

Für jeden Schnittpunkt (x/y) der Ellipse mit diesem Kreis müssen beide Gleichungen gelten, also

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad \text{und} \quad y^2 = -x^2 + 2xm + a^2 - 2am.$$

Setzen wir in der ersten Gleichung für y^2 den Ausdruck von der Kreisgleichung ein, sehen wir, dass Folgendes für die x-Koordinaten der Schnittpunkte gelten muss:

$$\begin{aligned} & b^2x^2 - a^2 \cdot (-x^2 + 2xm + a^2 - 2am) = a^2b^2 \\ \iff & b^2x^2 + a^2x^2 - 2a^2mx - a^4 + 2a^3m - a^2b^2 = 0 \\ \iff & (b^2 + a^2) \cdot x^2 - 2a^2m \cdot x - (a^4 - 2a^3m + a^2b^2) = 0. \end{aligned}$$

Ist nun $M = K_B$ der Mittelpunkt des Hauptscheitelkrümmungskreises, so fallen alle Schnittpunkte zusammen. Das bedeutet, dass diese quadratische Gleichung genau eine Lösung hat, und dies ist wiederum damit gleichbedeutend, dass die Diskriminante der quadratischen Gleichung gleich 0 ist. Es gilt also

$$\begin{aligned} D = 0 \iff & (-2a^2m)^2 = 4(b^2 + a^2)(-a^4 + 2a^3m - a^2b^2) \\ \iff & 4a^4m^2 - 4(a^2 + b^2) \cdot 2a^3 \cdot m + 4(a^2 + b^2)(a^4 + a^2b^2) = 0 \\ \iff & a^2m^2 - 2am(a^2 + b^2) + (a^2 + b^2)^2 = 0 \\ \iff & (am - (a^2 + b^2))^2 = 0 \\ \iff & m = \frac{a^2 + b^2}{a}. \end{aligned}$$

Koordinaten der Hauptscheitelkrümmungskreise

Wir sehen also, dass der Mittelpunkt K_B des Hauptscheitelkrümmungskreises durch B die Koordinaten $K_B(\frac{a^2+b^2}{a}/0)$ hat. Aufgrund der Symmetrie, erhalten wir auch sofort den Mittelpunkt des Krümmungskreises durch A als $K_A(-\frac{a^2+b^2}{a}/0)$.

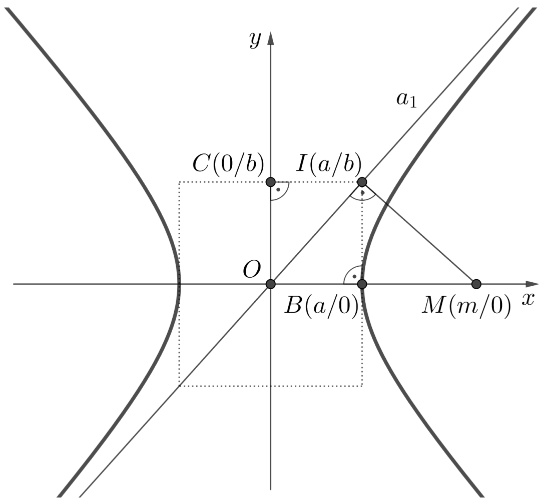
Hyperbelscheitelkrümmungskreismittelpunktskonstruktion

Jetzt sind wir so weit, dass wir eine sehr einfache Konstruktion der Scheitelkrümmungskreise einer durch ihre Achsenlängen gegebenen Hyperbel ableiten können.

Konstruktion 1 (Konstruktion des Mittelpunkts des Scheitelkrümmungskreises einer Hyperbel)**.** Gegeben sei eine Hyperbel mit Mittelpunkt O, Hauptachsenlänge a und Nebenachsenlänge b. Konstruiere den Mittelpunkt K_B des Scheitelkrümmungskreises durch B.

Lösung.

1) Wir konstruieren zuerst die Normale zur Hauptachse durch B und die Normale zur Nebenachse durch C. (Natürlich kann dieses Paar von Haupt- und Nebenscheiteln aufgrund der Symmetrie durch jedes andere ersetzt werden.) Diese beiden Normalen schneiden sich im Hilfspunkt I der Asymptote $a_1 = OI$ mit den Koordinaten $I(a/b)$.



2) Anschließend konstruieren wir die Normale zu a_1 durch I. Den Schnittpunkt dieser Normalen mit der Hauptachse bezeichnen wir mit M (mit den Koordinaten $M(m/0)$).

Wir wollen jetzt nachweisen, dass $m = \frac{a^2+b^2}{a}$ gilt, womit wir $M = K_B$ konstruiert haben.

Zu diesem Zweck bemerken wir, dass die beiden rechtwinkeligen Dreiecke BOI und IOM den Winkel in O gemeinsam haben, und somit ähnlich sind. Es gilt daher

$$\frac{MO}{IO} = \frac{IO}{BO} \iff \frac{m}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

Dies ist gleichwertig mit $m = \frac{a^2+b^2}{a}$, und es gilt also wie behauptet $M = K_B$. □