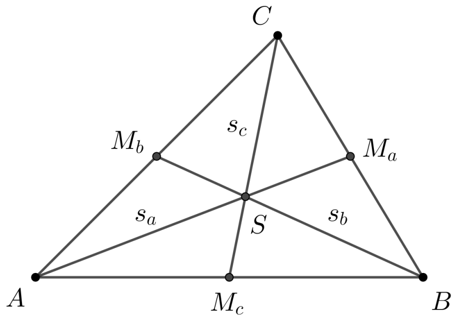
GRUNDLAGENBLATT – SCHWERLINIEN UND SCHWERPUNKT

Fragen & Antworten auf diesem Grundlagenblatt

✓ Was sind die **Schwerlinien** und der **Schwerpunkt** eines Dreiecks?
✓ In welchem Verhältnis teilt der Schwerpunkt die Schwerlinien?
✓ Wieso schneiden die Schwerlinien einander in einem gemeinsamen Punkt?

Schwerlinien & Schwerpunkt

Im Dreieck ABC rechts sind die Mittelpunkte M_a, M_b und M_c der 3 Seiten eingezeichnet. Die **Schwerlinien** $\boldsymbol{s_a}$, $\boldsymbol{s_b}$ und $\boldsymbol{s_c}$ sind die Verbindungen der Eckpunkte mit den Mittelpunkten der jeweils gegenüberliegenden Seiten.



Je nach Kontext bezeichnet man wahlweise die (endlichen) Verbindungsstrecken oder die (unendlichen) Verbindungsgeraden als Schwerlinien des Dreiecks. Je nach Bedarf kann die Bezeichnung s_a für die Verbindungsgerade von A und M_a stehen, für die Verbindungsstrecke, oder für die Länge der Verbindungsstrecke.

1) In jedem Dreieck ABC treffen einander die drei Schwerlinien s_a, s_b und s_c in einem gemeinsamen Punkt. Dieser Punkt heißt **Schwerpunkt** $\boldsymbol{S}$ des Dreiecks.

2) Der Schwerpunkt drittelt jede Schwerlinie, d.h. es gilt

$$\boldsymbol{AS = 2 \cdot SM_a}, \quad \boldsymbol{BS = 2 \cdot SM_b} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{CS = 2 \cdot SM_c}$$

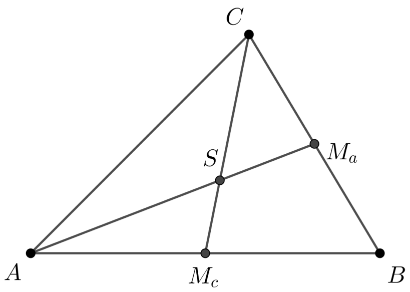
Es gibt mehrere Möglichkeiten, diese beiden Eigenschaften der Schwerlinien zu begründen.
Zum Beispiel: Vektorrechnung oder elementar mit Kongruenzen und dem Strahlensatz.
Die folgende Begründung baut auf den Eigenschaften der zentrischen Streckung auf.

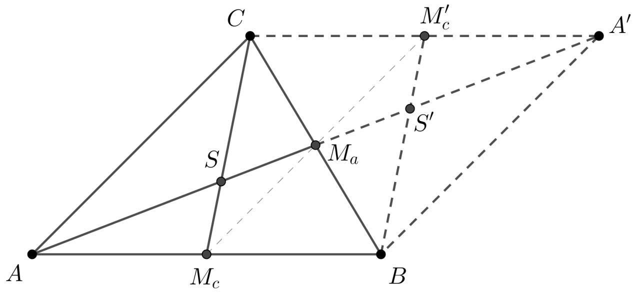
Datum: 17. November 2022.

Beweis. Ein beliebiges Dreieck ABC ist unten links dargestellt.

1) Wir wählen zwei beliebige Eckpunkte des Dreiecks (A und C) und zeichnen die Schwerlinien ein. Den Schnittpunkt der beiden Schwerlinien bezeichnen wir mit S.

2) Wir spiegeln das Dreieck ABC am Mittelpunkt M_a der Seite BC.
Das Ergebnis ist rechts dargestellt:





Erinnere dich, dass die Punktspiegelung eine zentrische Streckung mit Skalierungsfaktor $k = -1$ ist. Strecken werden also unter dieser Spiegelung auf gleich lange parallele Strecken abgebildet. Entsprechende Winkel bleiben unter einer zentrischen Streckung gleich groß.
Insbesondere folgt daraus:

- Die Punkte B und C werden aufeinander abgebildet.
- Die Dreiecke ABC und $A'BC$ sind kongruent.
- Die Strecken AM_a und M_aA' können knickfrei zu einer Strecke AA' vereinigt werden.
- Der Mittelpunkt M_c von AB wird auf den Mittelpunkt M_c' von $A'C$ gespiegelt.
- Der gespiegelte Punkt S' liegt sowohl auf $A'M_a$ als auch auf BM_c'.
- Die Strecke CM_c ist parallel zu BM_c'.
- Die Strecken SM_a und M_aS' sind gleich lang, also $SS' = 2 \cdot SM_a$.

3) Da M_c der Mittelpunkt von AB ist, folgt aus dem Strahlensatz, dass $AS = SS'$ gilt.
Daraus folgt das behauptete Teilungsverhältnis $AS = SS' = 2 \cdot SM_a$.

4) Der Mittelpunkt M_a war als Zentrum der Spiegelung in **2)** beliebig gewählt.
Mit M_b bzw. M_c als Zentrum folgt auf die gleiche Weise $BS = 2 \cdot SM_b$ bzw. $CS = 2 \cdot SM_c$.

5) Es gibt *genau einen* Punkt S auf der Strecke AM_a mit $AS = 2 \cdot SM_a$. Innerer Teilungspunkt
Wir haben gezeigt, dass der Schnittpunkt von AM_a und CM_c diese Eigenschaft hat.
Wählen wir in **1)** stattdessen die Eckpunkte A und B, können wir genauso folgern, dass auch der Schnittpunkt von AM_a und BM_b diese Eigenschaft hat.
Die drei Schwerlinien schneiden einander also in einem gemeinsamen Punkt S. □