GRUNDLAGENBLATT – STRECKENTEILUNG

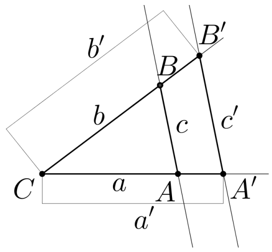
Fragen & Antworten auf diesem Grundlagenblatt

- ✓ Was ist die **Umkehrung des Strahlensatzes**?
- ✓ Wie konstruiert man einen **inneren Teilungspunkt** einer gegebenen Strecke?
- ✓ Wie konstruiert man einen **äußeren Teilungspunkt** einer gegebenen Strecke?

Strahlensatz

Zwei Strahlen gehen vom Punkt C aus.
Die Strahlen werden von zwei parallelen Geraden geschnitten.
Dann gilt nach dem Strahlensatz:

1) $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ **2)** $\frac{a'-a}{a} = \frac{b'-b}{b}$

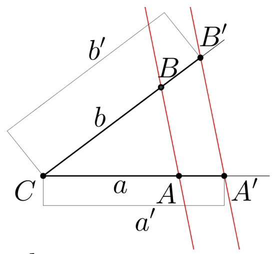


Umkehrung des Strahlensatzes

Gegeben sind 4 positive Zahlen a, a', b und b' mit:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

Zwei Strahlen gehen vom Punkt C aus.



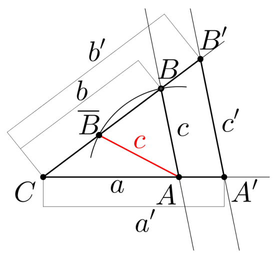
Auf dem einen Strahl werden Punkte A, A' mit $CA = a$ und $CA' = a'$ markiert.
Auf dem anderen Strahl werden Punkte B, B' mit $CB = b$ und $CB' = b'$ markiert.
Die **Umkehrung des Strahlensatzes** besagt, dass die Geraden AB und $A'B'$ dann parallel sind.

Begründung: Angenommen, die beiden Geraden sind *nicht* parallel. Dann zeichne eine zu AB parallele Gerade durch A'.
Die Längen a, b und a' bleiben dann gleich, aber b' ändert sich.
Das ist ein Widerspruch zum Strahlensatz für die parallen Geraden. Also müssen AB und $A'B'$ schon parallel sein.

Erkläre mithilfe der Skizze, warum aus

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$$

nicht folgt, dass die Geraden parallel sein müssen.



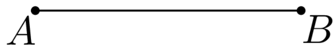
Datum: 17. November 2022.

Der Strahlensatz und seine Umkehrung ermöglichen uns, Strecken sowohl innen als auch außen in beliebigen rationalen Verhältnissen zu teilen.

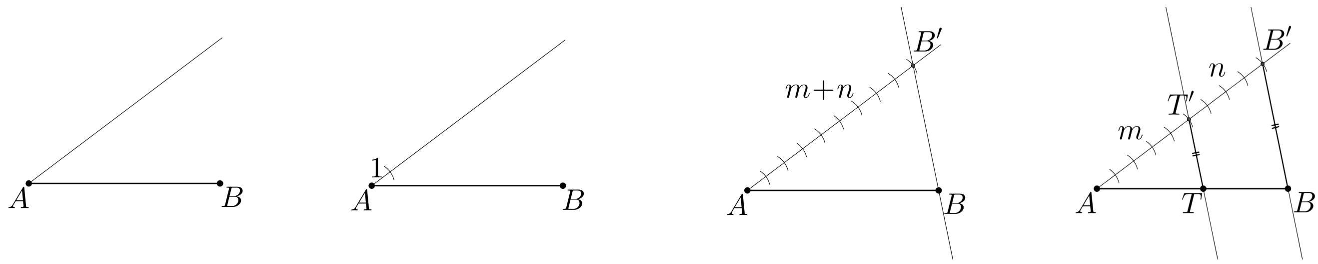
Konstruktion 1. Gegeben sind zwei positive ganze Zahlen m und n.
Teile die gegebene Strecke AB *im Inneren* im Verältnis $m : n$.

Gesucht ist also ein Punkt T auf der Strecke AB mit:

$$AT : TB = m : n$$



Lösung. Die folgenden vier Konstruktionsschritte **1) - 4)** sind für $m = 5$ und $n = 4$ dargestellt:



1) Wir zeichnen die Strecke AB und einen beliebigen (von AB verschiedenen) Strahl durch A.

2) Wir schlagen mit dem Zirkel eine Strecke beliebiger Länge (z.B. 1 cm) auf diesem Strahl ab.

3) Vom Schnittpunkt schlagen wir erneut dieselbe Länge ab und wiederholen den Vorgang, bis wir $m+n$ Streckenabschnitte gleicher Länge haben. Den Endpunkt des letzten Streckenabschnitts nennen wir B'.

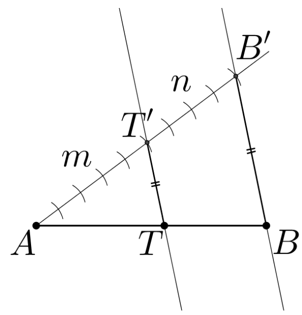
4) Nun verbinden wir B' mit B. Wir zeichnen eine zu BB' parallele Gerade durch den Endpunkt T' der m-ten Strecke.
Der Schnittpunkt mit der Strecke AB ist der gesuchte innere Teilungspunkt T.

Innerer Teilungspunkt

Erkläre, warum für den konstruierten Punkt T tatsächlich

$$AT : TB = m : n$$

gilt.

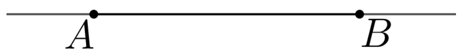


□

Konstruktion 2. Gegeben sind zwei positive ganze Zahlen $m > n$.
Teile die gegebene Strecke AB *außen* im Verhältnis $m : n$.

Gesucht ist also ein Punkt T, der

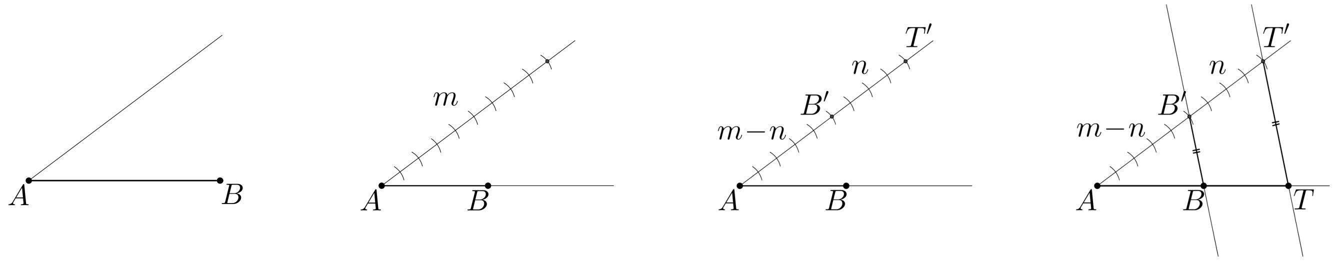
$$AT : TB = m : n$$



erfüllt und auf der Gerade AB rechts von B liegt.

Aus $m > n$ folgt, dass der äußere Teilungspunkt rechts von B liegen muss. Wenn $m < n$ ist, dann liegt er links von A.

Lösung. Die folgenden vier Konstruktionsschritte **1) - 4)** sind für $m = 9$ und $n = 4$ dargestellt:



1) Wir zeichnen den Strahl AB und einen beliebigen (von AB verschiedenen) Strahl durch A.

2) Wir schlagen mit dem Zirkel eine Strecke beliebiger Länge (z.B. 1 cm) auf diesem Strahl ab. Insgesamt schlagen wir diese Streckenlänge m Mal ab.

3) Den Endpunkt des letzten Streckenabschnitts nennen wir T', den Schnittpunkt nach $m - n$ Strecken (von A aus gesehen) nennen wir B'. Die Strecke AT' setzt sich nun aus m Teilen zusammen, die Strecke $B'T'$ aus n Teilen.

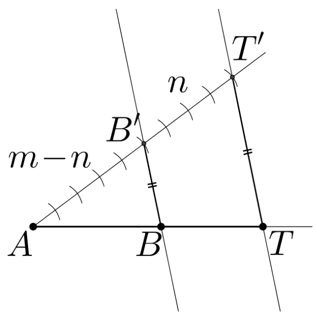
4) Nun verbinden wir B' mit B. Wir zeichnen eine zu BB' parallele Gerade durch den Endpunkt der m-ten Strecke T'.
Der Schnittpunkt mit der Strecke AB ist der gesuchte äußere Teilungspunkt T.

Äußerer Teilungspunkt

Erkläre, warum für den konstruierten Punkt T tatsächlich

$$AT : TB = m : n$$

gilt.



□