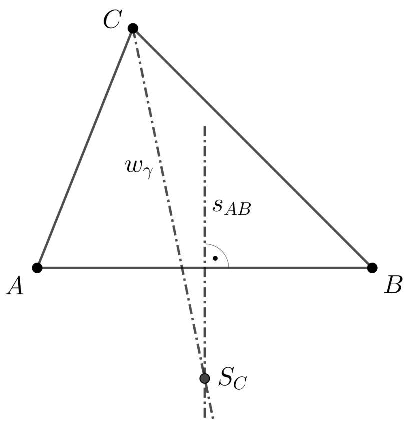
GRUNDLAGENBLATT – SÜDPOLSATZ

Fragen & Antworten auf diesem Grundlagenblatt

- ✓ Welcher besondere Punkt ist der **Südpol** eines Dreiecks?
- ✓ Wie beweist man den **Südpolsatz**?
- ✓ Wie ist der **Nordpol** eines Dreiecks definiert?
- ✓ Was besagt der **erweiterte Südpolsatz** und wie kann man diesen beweisen?

In einem Dreieck ABC schneiden die Seitensymmetrale s_{AB} und die Innenwinkelsymmetrale w_γ einander in einem Punkt S_C, der als *Südpol* des Dreiecks bezüglich C bezeichnet wird.



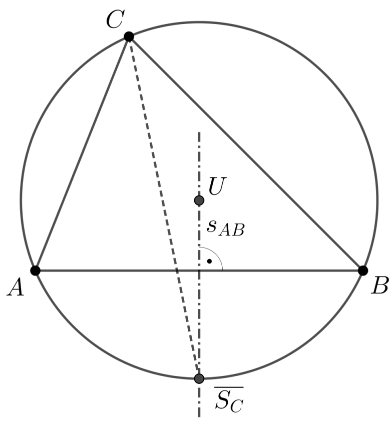
Die Motivation für diese Bezeichnungsweise liegt in der Orientierung der Figur mit Bezug auf den Inhalt des folgenden Satzes.

Südpolsatz

Der Südpol S_C eines Dreiecks ABC bezüglich seines Eckpunkts C liegt auf dem Umkreis von ABC.

Beweis. Um diese Behauptung zu beweisen, zeichnen wir ein Dreieck ABC, seinen Umkreis und seine Seitensymmetrale s_{AB}. Der Umkreismittelpunkt U des Dreiecks liegt dabei sicher auf s_{AB}. Wir bezeichnen den Schnittpunkt von s_{AB} mit dem Umkreis von ABC als $\overline{S_C}$.

Datum: 17. November 2022.



Da U auf s_{AB} liegt, ist s_{AB} eine Symmetrieachse des Umkreises von ABC. Bei Spiegelung dieses Kreises an s_{AB} gehen A und B ineinander über, während $\overline{S_C}$ fix bleibt. Die Bögen $A\overline{S_C}$ und $B\overline{S_C}$ liegen also symmetrisch bezüglich s_{AB}, und sind daher gleich lang. Aufgrund des Peripheriewinkelsatzes gilt somit $\angle AC\overline{S_C} = \angle\overline{S_C}CB$. Der Punkt $\overline{S_C}$ liegt somit sowohl auf der Winkelsymmetrale w_γ von $\angle ACB$ als auch auf der Seitensymmetrale s_{AB}, und ist daher identisch mit dem Südpol S_C von ABC bezüglich C. Mit $S_C = \overline{S_C}$ liegt der Südpol wie behauptet auf dem Umkreis von ABC. □

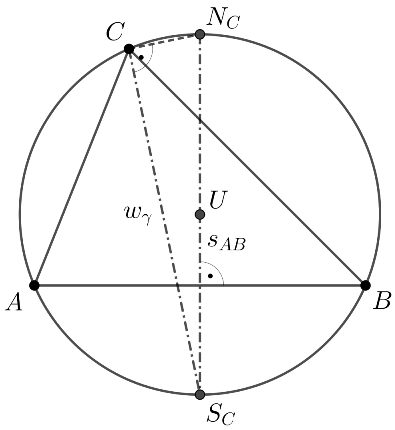
Betrachten wir die Figur nun mit etwas Fantasie, ist der Ursprung des Begriffs „Südpol" nachvollziehbar. Sehen wir den Umkreis von ABC als Erdkugel, so ergibt sich die Lage von S_C bei waagrechter Lage von AB und C darüber als unterster Punkt, also als Südpol.

Natürlich ergibt sich bei dieser Namensgebung sofort die Frage nach der Rolle des diametral gegenüberliegenden „Nordpols ". Da erhalten wir folgendes Lemma.

Lemma (Nordpolsatz)

Der Schnittpunkt der Seitensymmetrale s_{AB} eines Dreiecks ABC mit der Außenwinkelsymmetrale des Dreiecks in C liegt auf dem Umkreis des Dreiecks.

Beweis. Wir betrachten den diametral gegenüberliegenden Punkt N_C zum Südpol S_C des Dreiecks ABC im Umkreis von ABC.



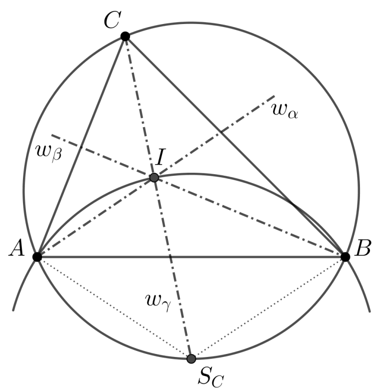
Da S_CN_C ein Durchmesser des Umkreises ist, gilt aufgrund des Satzes von Thales $\angle S_CCN_C = 90°$. Da $CS_C = w_\gamma$ gilt und die Außenwinkelsymmetrale in C normal zu w_γ steht, liegt N_C somit auf dieser Außenwinkelsymmetrale. □

Von besonderem Interesse ist in diesem Zusammenhang auch folgendes Ergebnis.

Erweiterter Südpolsatz

Der Inkreismittelpunkt eines Dreiecks ABC liegt auf dem Kreis mit Mittelpunkt im Südpol S_C durch die beiden Eckpunkte A und B.

Beweis. Da S_C auf dem Umkreis von ABC liegt, folgt aus $\angle ACB = \gamma$ sicher $\angle BS_CA = 180° - \gamma$. Im Kreis mit Mittelpunkt S_C durch A und B ist also der Peripheriewinkel über die Strecke AB im großen Bogen gleich $\frac{1}{2} \cdot (180° - \gamma) = 90° - \frac{\gamma}{2}$ und im kleinen Bogen daher gleich $180° - \left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) = 90° + \frac{\gamma}{2}$. Da I im Inneren von ABC liegt und S_C auf dem Umkreis, liegen I und S_C auf verschiedenen Seiten von AB. Um nachzuweisen, dass I auf diesem Bogen liegt, müssen wir also zeigen, dass $\angle AIB = 90° + \frac{\gamma}{2}$ gilt.



Da I der Schnittpunkt der Winkelsymmetralen w_α und w_β in A bzw. B ist, gilt im Dreieck AIB

$$\angle AIB = 180^\circ - \angle BAI - \angle IBA = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2},$$

und wegen

$$180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot (\alpha + \beta + \gamma) - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$$

ist dies auch tatsächlich der Fall, und wir sind fertig. □