GRUNDLAGENBLATT – WINKELKONSTRUKTIONEN

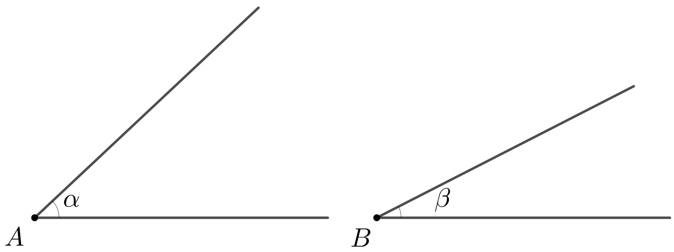
Fragen & Antworten auf diesem Grundlagenblatt

Zwei Winkel α und β sind gegeben.

✓ Wie konstruiert man $\boldsymbol{\alpha + \beta}$ und $\boldsymbol{\alpha - \beta}$?
✓ Wie konstruiert man $\boldsymbol{\frac{\alpha}{2}}$?
✓ Wie konstruiert man Winkel mit Größe **180°** bzw. **60°**?
✓ Wie konstruiert man **regelmäßige Fünfecke** bzw. Winkel mit Größe **72°**?
✓ Wie konstruiert man Winkel mit Größe **3°**?
✓ Welche Winkel mit **ganzzahligem Gradmaß** sind konstruierbar?

Addition, Subtraktion und Halbierung von Winkeln

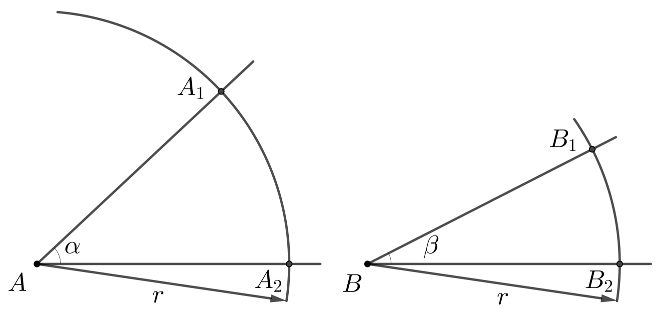
Konstruktion 1. Gegeben sind zwei Winkel mit den Größen α (mit Scheitel A) und β (mit Scheitel B und $\alpha > \beta$).



Konstruiere mit euklidischen Mitteln Winkel der Größen $\alpha + \beta$ bzw. $\alpha - \beta$.

Lösung.

1) Dazu zeichnen wir zuerst zwei Kreisbögen mit gleichem (beliebigem) Radius r und Mittelpunkten in A bzw. B:

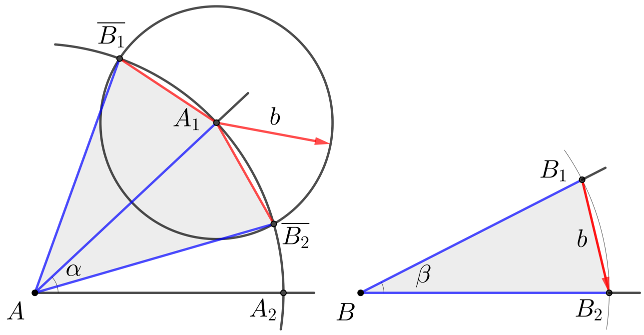


Der Kreisbogen mit Mittelpunkt A schneidet die Schenkel des Winkels α in den beiden Punkten A_1 und A_2.

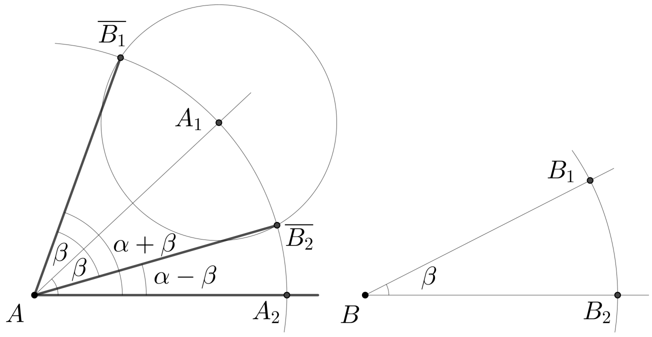
Der Kreisbogen mit Mittelpunkt B schneidet die Schenkel des Winkels β in den beiden Punkten B_1 und B_2.

Datum: 17. November 2022.

2) Zeichnen wir nun den Kreis mit Radius $b = B_1B_2$ und Mittelpunkt A_1, so schneidet dieser Kreis den zuvor gezeichneten Bogen mit Mittelpunkt A in den beiden Punkten $\overline{B_1}$ und $\overline{B_2}$.



3) Wir begründen abschließend, warum $\angle A_2A\overline{B_1} = \alpha + \beta$ und $\angle A_2A\overline{B_2} = \alpha - \beta$ gilt:



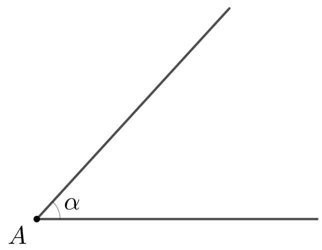
Die Dreiecke $A\overline{B_1}A_1$, $A\overline{B_2}A_1$ und BB_1B_2 sind nach dem Seiten-Seiten-Seiten-Satz (SSS) kongruent, weil $AA_1 = BB_1 = BB_2 = A\overline{B_1} = A\overline{B_2} = r$ und $A_1\overline{B_1} = A_1\overline{B_2} = B_1B_2 = b$ gilt.
Es gilt somit $\angle B_2BB_1 = \angle A_1A\overline{B_1} = \angle\overline{B_2}AA_1 = \beta$.
Wir haben somit erreicht, dass

$$\angle A_2A\overline{B_1} = \angle A_2AA_1 + \angle A_1A\overline{B_1} = \alpha + \beta$$

gilt, sowie

$$\angle A_2A\overline{B_2} = \angle A_2AA_1 - \angle\overline{B_2}AA_1 = \alpha - \beta. \qquad \square$$

Konstruktion 2. Gegeben ist ein Winkel der Größe α mit Scheitel A.

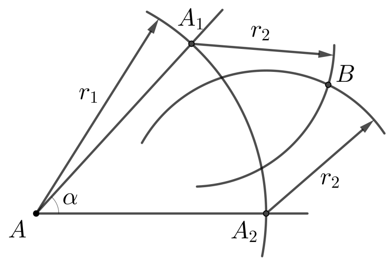


Konstruiere mit euklidischen Mitteln einen Winkel der Größe $\frac{\alpha}{2}$.

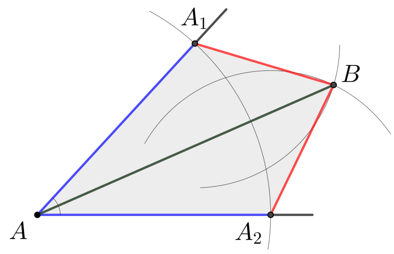
Lösung.

1) Wir zeichnen zuerst einen Kreisbogen mit einem beliebigen Radius r_1 und Mittelpunkt A. Dieser schneidet die beiden Schenkel des Winkels α in den Punkten A_1 bzw. A_2.

Anschließend zeichnen wir zwei Kreisbögen, beide mit dem beliebigen (aber ausreichend großen) Radius r_2 und den Mittelpunkten A_1 bzw. A_2. Einen Schnittpunkt dieser beiden Kreisbögen bezeichnen wir mit B.

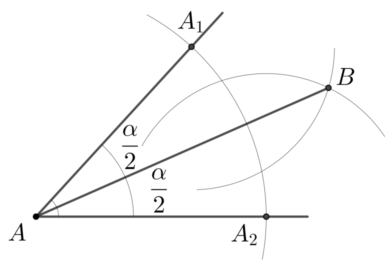


2) Die beiden Dreiecke A_1AB und A_2AB mit gemeinsamer Seite AB sind nach dem SSS-Satz kongruent, weil $AA_1 = AA_2 = r_1$ und $BA_1 = BA_2 = r_2$ gilt.



3) Daraus folgt, dass die beiden Winkel $\angle A_2AB$ und $\angle BAA_1$ gleich groß sind. Es gilt also:

$$\angle A_2AB = \angle BAA_1 = \frac{\alpha}{2}$$

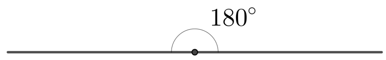


□

Winkel mit ganzzahligem Gradmass

Gestreckter Winkel

Ein Winkel, dessen Schenkel auf einer gemeinsamen Geraden liegen und vom Scheitel in entgegengesetzte Richtungen weisen, heißt **gestreckter Winkel**:



Einem gestreckten Winkel wird das Gradmaß $180°$ zugewiesen.

Welche Winkel $\alpha \in \mathbb{Z}$ mit $0° < \alpha < 360°$ können mit euklidischen Mitteln konstruiert werden?

Teilbarkeit durch 3 $\Longrightarrow$ Konstruierbarkeit

Auf den folgenden Seiten erklären wir die folgende Aussage:
Jeder Winkel mit einem ganzzahligen Gradmaß, das durch 3 teilbar ist,
kann mit euklidischen Mitteln konstruiert werden.

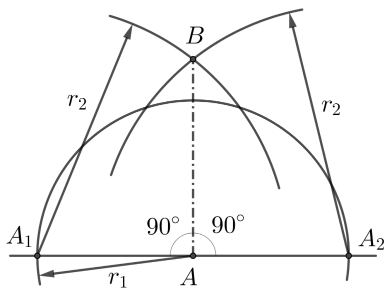
Konstruierbarkeit $\Longrightarrow$ Teilbarkeit durch 3

Mit Hilfe von Mitteln der Algebra, auf die hier nicht weiter eingegangen wird, kann man beweisen:
Jeder Winkel mit einem ganzzahligen Gradmaß, das *nicht* durch 3 teilbar ist,
kann *nicht* mit euklidischen Mitteln konstruiert werden.

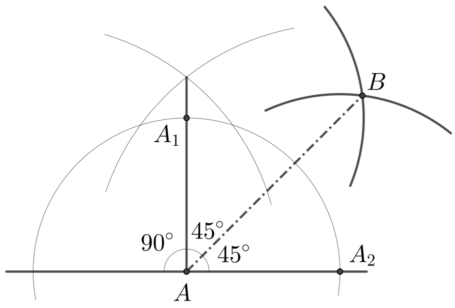
Konstruktion 3. Konstruiere einen Winkel mit Gradmaß … **1)** $90°$. **2)** $45°$.

Lösung.

1) Der Winkel $180°$ ist mit euklidischen Mitteln konstruierbar. Halbieren wir diesen Winkel (Konstruktion 2), erhalten wir zwei **rechte Winkel** mit dem Gradmaß $\frac{1}{2} \cdot 180° = \mathbf{90°}$.



2) Halbieren wir mit Konstruktion 2 einen solchen rechten Winkel, erhalten wir zwei Winkel mit dem Gradmaß 45°.



□

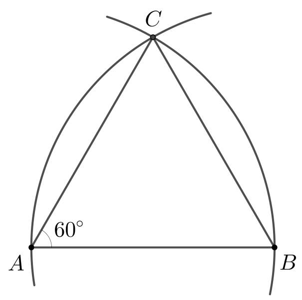
Natürlich kann man diesen Halbierungsprozess weiter vorantreiben. Da aber 45 eine ungerade Zahl ist, erhält man nur mehr Winkel mit nicht-ganzzahligen Gradmaßen (also 22,5°, 11,25°, usw.).

Auf der Suche nach Konstruktionen, die Winkel mit ganzzahligen Gradmaßen liefern, die nicht Vielfache von 45° sind, können wir uns mit der Konstruktion spezieller regelmäßiger Vielecke behelfen.

Konstruktion 4. Konstruiere einen Winkel mit Gradmaß … **1)** 60°. **2)** 30°. **3)** 15°.

Lösung.

1) Die Winkelsumme in jedem Dreieck ist 180°.
In einem gleichseitigen Dreieck sind alle Innenwinkel gleich groß, also $\frac{180°}{3} = 60°$.
Jedes Dreieck mit gegebenen Seitenlängen ist euklidisch konstruierbar.



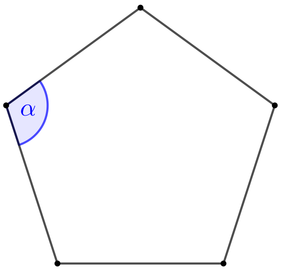
In der Figur links ist zuerst eine beliebige Strecke AB gezeichnet worden. Der Kreisbogen mit Mittelpunkt A, der durch B geht, schneidet den Kreisbogen mit Mittelpunkt B, der durch A geht, im Punkt C. Aufgrund der gleichen Kreisradien sind die Strecken AB, AC und BC alle gleich lang, und das Dreieck ABC ist somit gleichseitig.

2) Halbierung des Winkels mit Größe 60° mit Konstruktion 2 liefert einen Winkel mit Größe 30°.
3) Halbierung des Winkels mit Größe 30° mit Konstruktion 2 liefert einen Winkel mit Größe 15°.

□

Regelmäßiges Fünfeck

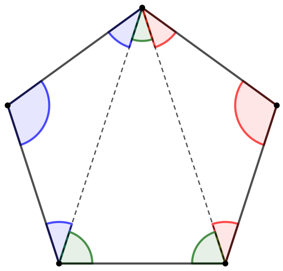
Im links dargestellten Fünfeck sind alle Seiten gleich lang und alle Innenwinkel gleich groß. Ein solches Fünfeck heißt auch **regelmäßiges Fünfeck**.



Rechts wurde das regelmäßige Fünfeck mit zwei Diagonalen in drei Dreiecke zerlegt.

1) Erkläre damit, warum die Winkelsumme in jedem regelmäßigen Fünfeck $540°$ beträgt.

2) Erkläre, warum jeder Innenwinkel im regelmäßigen Fünfeck die Größe $\alpha = 108°$ hat.

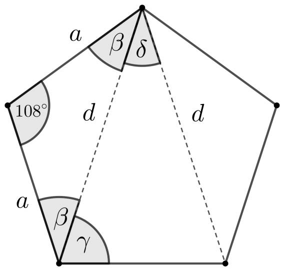


In jedem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich groß.

3) Erkläre damit, warum die rechts eingezeichneten Winkel β das Gradmaß $36°$ haben.

4) Erkläre damit, warum der rechts eingezeichnete Winkel γ das Gradmaß $72°$ hat.

Die Diagonalen im regelmäßigen Fünfeck haben die gleiche Länge d.

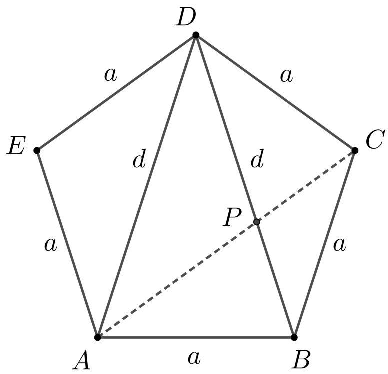


5) Erkläre damit, warum der rechts eingezeichnete Winkel δ das Gradmaß $36°$ hat.

Im folgenden Bild haben wir eine weitere Diagonale und den Schnittpunkt P eingezeichnet.

6) Erkläre, warum $\angle DBA = \angle PBA = 72°$ gilt.

7) Erkläre, warum $\angle BAC = \angle BAP = 36°$ gilt.



Die Dreiecke ABD und PBA sind somit zueinander ähnliche gleichschenklige Dreiecke.

Sie haben beide die drei Winkel $72°$, $36°$ und $72°$.

8) Erkläre, warum das Dreieck PCD gleichschenklig ist.

Hinweis: Wie groß sind seine Winkel?

Es gilt also: $BP = BD - PD = d - a$

In ähnlichen Dreiecken stehen entsprechende Seitenlängen im selben Verhältnis zueinander. In den ähnlichen Dreiecken ABD und PBA gilt also

⇝ Arbeitsblatt – Strahlensatz

$$DA : AB = AB : BP \iff d : a = a : (d - a),$$

was gleichwertig ist mit $d \cdot (d - a) = a^2$ und $d^2 - a \cdot d - a^2 = 0$.

Wir lösen diese quadratische Gleichung nach d auf:

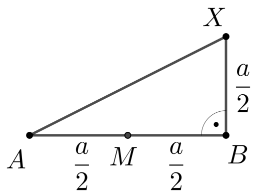
Wegen $d > 0$ ist nur die positive Lösung relevant.

$$d = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{5 \cdot a^2}{4}} = \frac{a}{2} + \frac{a \cdot \sqrt{5}}{2} = a \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Konstruktion 5. Konstruiere ein regelmäßiges Fünfeck mit gegebener Seitenlänge a.

Lösung. Wir konstruieren zuerst aus der Seitenlänge a die Diagonalenlänge $d = a \cdot \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

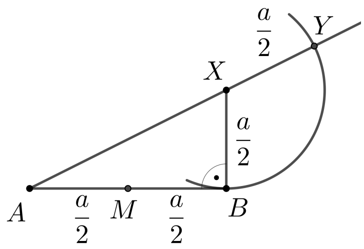
1) Den Mittelpunkt M der unten dargestellten Strecke AB können wir euklidisch konstruieren.
Mit Konstruktion 3 können wir einen rechten Winkel mit Scheitel B konstruieren.
Dann schlagen wir die halbe Strecke mit Länge $\frac{a}{2}$ ab und erhalten damit den Punkt X:



Nach dem pythagoräischen Lehrsatz gilt:

$$AX = \sqrt{AB^2 + BX^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4 \cdot a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = a \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}$$

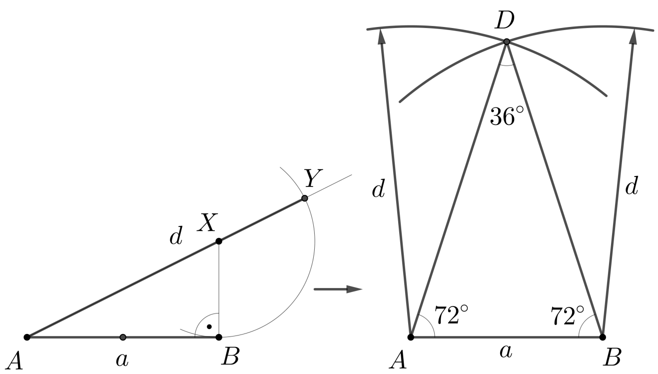
2) Nun schlagen wir mit dem Zirkel eine Strecke der Länge $\frac{a}{2}$ von X aus auf der Verlängerung von AX wie abgebildet ab:



Damit erhalten wir einen Punkt Y, für den gilt:

$$AY = AX + XY = a \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{a}{2} = a \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = d$$

3) Wir können also jetzt ein Dreieck ABD mit den Seitenlängen a, d und d konstruieren:



Aus den Eigenschaften regelmäßiger Fünfecke und dem SSS-Satz folgt, dass die Innenwinkel 36° bzw. 72° betragen.

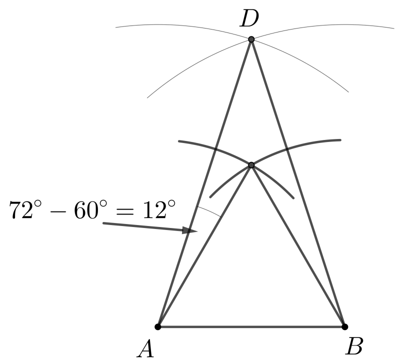
Außerdem können wir das Dreieck ABD durch Ergänzen der gleichschenkligen Dreiecke BCD und DEA mit Schenkellängen a zu einem regelmäßigen Fünfeck ergänzen.

□

Konstruktion 6. Konstruiere einen Winkel mit Gradmaß 3°.

Lösung.

1) Zuerst konstruieren wir ein regelmäßiges Fünfeck mit beliebiger Seitenlänge und damit einen Winkel der Größe 72°. (Konstruktion 5)
Dann konstruieren wir ein gleichseitiges Dreieck mit gleicher Seitenlänge. (Konstruktion 4)
Die Differenz dieser beiden Winkel hat also die Größe 12°.



2) Halbierung des Winkels mit Größe 12° mit Konstruktion 2 liefert einen Winkel mit Größe 6°.

3) Halbierung des Winkels mit Größe 6° mit Konstruktion 2 liefert einen Winkel mit Größe 3°. □

Mit Konstruktion 1 können wir schließlich jedes Vielfache von 3° euklidisch konstruieren.

Dieses Werk des Projekts MmF unterliegt einer CC BY-NC-ND 4.0 Lizenz.
https://mmf.univie.ac.at