GRUNDLAGENBLATT – ZENTRISCHE STRECKUNG

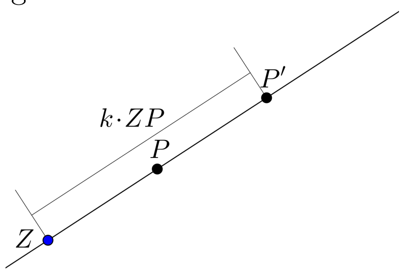
Fragen & Antworten auf diesem Grundlagenblatt

- ✓ Wie ist die **zentrische Streckung** eines Punktes P mit Zentrum Z und positivem bzw. negativem Skalierungsfaktor k definiert? Wie konstruiert man sie?
- ✓ Was passiert mit Strecken, Dreiecken, Vielecken und Kreisen, wenn man sie zentrisch streckt?
- ✓ Was passiert mit den Flächeninhalten von Objekten, wenn man sie zentrisch streckt?

Zentrische Streckung mit positivem Skalierungsfaktor

Gegeben ist ein Punkt Z und eine Zahl $k > 0$. Die **zentrische Streckung** mit **Zentrum Z** und **Skalierungsfaktor k** bildet jeden Punkt P auf einen eindeutig bestimmten Punkt P' ab:

1) P' liegt auf der Gerade ZP.
2) P' liegt auf derselben Seite von Z wie P.
3) Die Länge der Strecke ZP' ist das k-fache der Länge der Strecke ZP.



P' ist der **Bildpunkt** von P unter dieser zentrischen Streckung.
Für jeden Punkt $P \neq Z$ gilt also $ZP' : ZP = k : 1$.

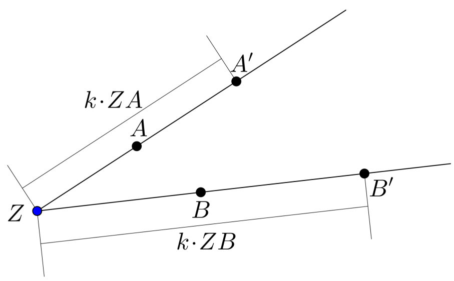
In der Literatur wird der Skalierungsfaktor auch Streckungsfaktor genannt – obwohl für $0 < k < 1$ gestaucht wird.

Strecken unter zentrischer Streckung

Gegeben ist ein Zentrum Z und ein Skalierungsfaktor $k > 0$.
Rechts sind zwei verschiedene Punkte A und B und ihre Bildpunkte A' und B' dargestellt.

1) Zeichne die Geraden AB und $A'B'$ rechts ein.
Erkläre, warum diese beiden Geraden parallel sind.

2) Erkläre, warum $A'B' : AB = k : 1$ gilt.



Die Entfernung der Bildpunkte A' und B' ist also das k-fache der Entfernung von A und B.

Datum: 17. November 2022.

Dreiecke und Winkel unter zentrischer Streckung

Gegeben ist ein Zentrum Z und ein Skalierungsfaktor $k > 0$.
Rechts sind ein Dreieck ABC und das zentrisch gestreckte Dreieck $A'B'C'$ dargestellt.

1) Erkläre, warum entsprechende Seiten parallel sind:

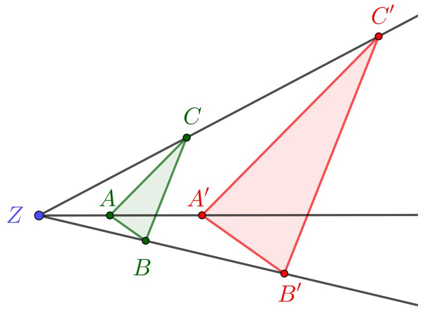
$$AB \parallel A'B',\ AC \parallel A'C' \quad \text{und} \quad BC \parallel B'C'$$

2) Erkläre, warum entsprechende Winkel gleich groß sind:

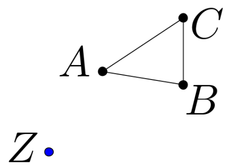
$\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle BCA = \angle B'C'A'$ und $\angle CAB = \angle C'A'B'$

Die beiden Dreiecke sind also zueinander ähnlich.

Die zentrische Streckung ist also eine sogenannte **Ähnlichkeitsabbildung**.



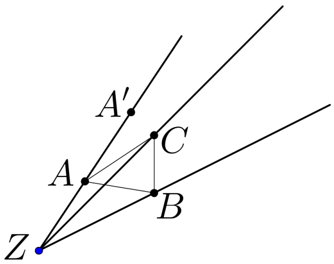
Konstruktion 1. Strecke das Dreieck ABC mit Zentrum Z mit gegebenem Faktor $k = 2$.

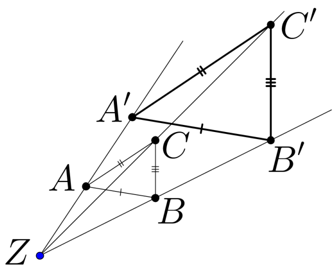


Lösung.

1) Die Punkte A', B' und C' sind auf derselben Seite von Z wie die Punkte des ursprünglichen Dreiecks. Wir zeichnen also die Strahlen ZA, ZB bzw. ZC. Wir können A' als den äußeren Teilungspunkt der Strecke ZA mit dem Verhältnis $ZA' : ZA = 2 : 1$ konstruieren.

Wenn der Skalierungsfaktor $k < 1$ ist, dann wird gestaucht. In diesem Fall müssen wir den inneren Teilungspunkt konstruieren.



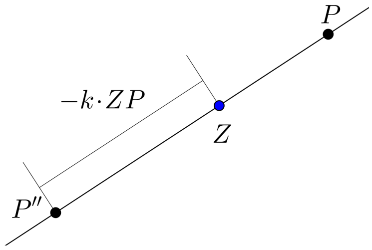


2) Wir können nun die Geraden AB bzw. AC parallel durch A' verschieben. Die Punkte B' und C' sind nun die Schnittpunkte dieser Parallelen mit den Strahlen ZB bzw. ZC.
Abschließend verbinden wir B' mit C'. □

Zentrische Streckung mit negativem Skalierungsfaktor

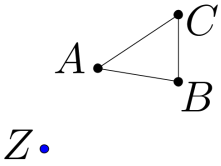
Gegeben ist ein Punkt Z und eine Zahl $k < 0$. Die **zentrische Streckung** mit **Zentrum Z** und **Skalierungsfaktor k** bildet jeden Punkt P auf einen eindeutig bestimmten Punkt P'' ab:

1) P'' liegt auf der Gerade ZP.
2) P'' liegt auf der *anderen* Seite von Z wie P.
3) Die Länge der Strecke ZP'' ist das $(-k)$-fache der Länge der Strecke ZP.



Das Zentrum Z ist bei *negativem* k also ein innerer Teilungspunkt der Strecke PP''.

Konstruktion 2. Strecke das Dreieck ABC mit Zentrum Z mit gegebenem Faktor $k = -0{,}75$.



Lösung.

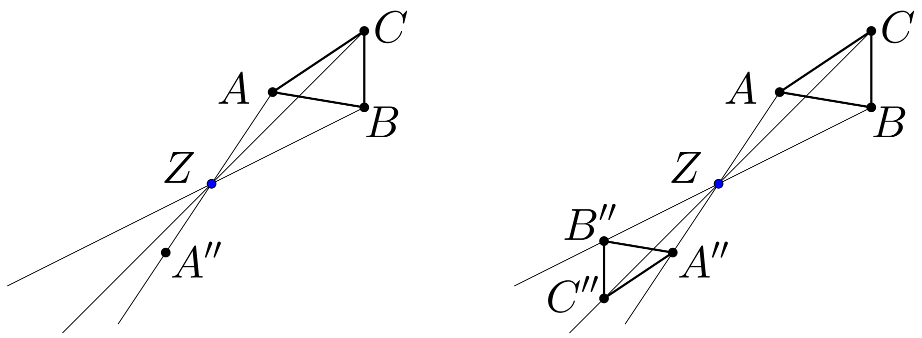
1) Z ist der innere Teilungspunkt von AA'' mit Teilungsverhältnis

$$A''Z : ZA = (-k) : 1 = 0{,}75 : 1 = 3 : 4.$$

Aus $A''A = A''Z + ZA$ folgt

$$A''A : ZA = \frac{A''Z + ZA}{ZA} = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4} = 7 : 4.$$

A'' ist also der äußere Teilungspunkt der Strecke ZA über Z hinaus im Verhältnis $7 : 4$.



2) Durch Parallelverschiebung der Trägergeraden der Dreiecksseiten wie bei Schritt **2)** von Konstruktion 1 erhalten wir das gestreckte (gestauchte) Dreieck $A''B''C''$.

Der Umlaufsinn des ursprünglichen Dreiecks bleibt bei negativem k erhalten.

□

Spezielle Werte von k

Gegeben ist das Zentrum Z und ein Punkt $P \neq Z$.

1) Welchen Bildpunkt hat P, wenn $k = 1$ ist?
Die zentrische Streckung nennen wir in diesem Fall auch **Identitätsabbildung**.

2) Welchen Bildpunkt hat P, wenn $k = -1$ ist?
Die zentrische Streckung nennen wir in diesem Fall auch **Punktspiegelung**.

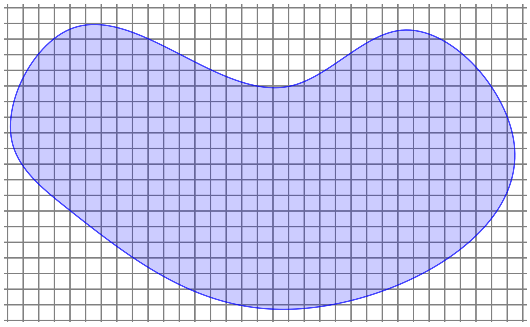
3) Wenn $k = 0$ ist, dann bildet die zentrische Streckung jeden Punkt auf Z ab.

Flächeninhalte unter zentrischer Streckung

Wir haben gesehen, dass bei zentrischen Streckungen mit dem Skalierungsfaktor k jede Streckenlänge mit dem Faktor $|k|$ multipliziert wird.

1) Mit welchem Faktor wird also der Flächeninhalt eines Rechtecks multipliziert?

2) Mit welchem Faktor wird also der Flächeninhalt eines Dreiecks multipliziert?

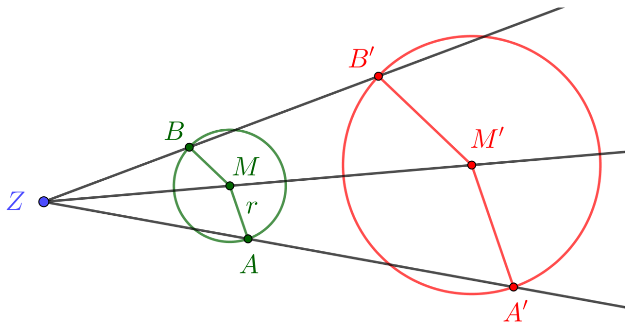


Tatsächlich wird auch der Flächeninhalt der rechts dargestellten Figur mit dem Faktor k^2 multipliziert. Dahinter steckt das Grundprinzip der Integration.

Mehr dazu findest du am Arbeitsblatt – Kulturtechnik Integration.

Kreise unter zentrischer Streckung

Wir strecken einen Kreis mit Radius r mit dem Skalierungsfaktor k und Zentrum Z.
A und B sind beliebige Punkte auf diesem Kreis mit Mittelpunkt M.
Erkläre, warum die Strecken $M'A'$ und $M'B'$ gleich lang sind.



Kreise werden unter zentrischer Streckung also tatsächlich auf Kreise abgebildet.
Wir können einen beliebigen Kreis mittels zentrischer Streckung mit beliebigem Zentrum Z (und dadurch definiertem Faktor k) in jeden Kreis überführen. *Somit sind alle Kreise zueinander ähnlich.* Dasselbe gilt übrigens mit derselben Begründung auch für regelmäßige Vielecke (also zum Beispiel gleichseitige Dreiecke und Quadrate).

Dieses Werk des Projekts MmF unterliegt einer CC BY-NC-ND 4.0 Lizenz.
https://mmf.univie.ac.at