

## GRUNDLAGENBLATT – ZIRKEL- UND LINEALKONSTRUKTIONEN

Fragen &amp; Antworten auf diesem Grundlagenblatt



- ✓ Was sind **euklidische Konstruktionen**?
- Welche Zirkel- und Linealkonstruktionen sind „erlaubt“?
- ✓ Wie konstruiert man ein Dreieck mit drei gegebenen Seitenlängen?
- ✓ Wie überträgt man einen Winkel?

Zur Herstellung geometrischer Bilder gibt es verschiedene Werkzeuge. Will man ein geometrisches Bild in einem Computersystem erzeugen, gibt es sowohl für die Darstellung eines dreidimensionalen Objekts wie auch eines zweidimensionalen Sachverhalts eine breite Palette an Softwaremöglichkeiten, die dabei behilflich sein können, von der geometrischen Idee zur bildlichen Darstellung des Sachverhalts zu gelangen.

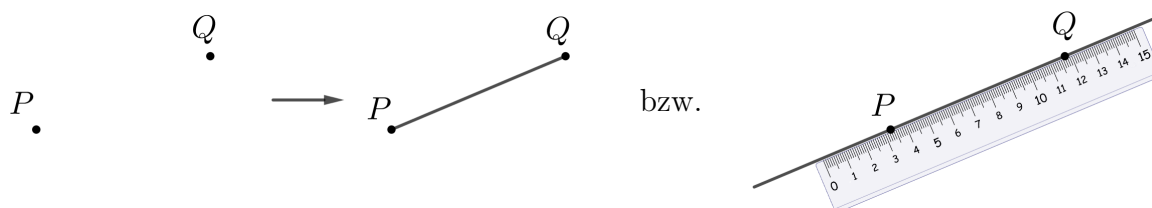
Der Großteil aller Konstruktionswerkzeuge, die in geometrischen Computerprogrammen zur Verfügung stehen, beruhen in ihrer Grundkonzeption auch auf den Möglichkeiten bestimmter traditioneller Zeichenwerkzeuge, wie etwa Zirkel oder Lineal. Das Lineal ist dabei ein Hilfsmittel mit gerader Kante, das ausschließlich zum Zeichnen von geraden Linien dient. Es enthält keine Skalen zum Messen von Längen oder gar Winkelmaße wie das Geodreieck. Genau die sogenannten „*Zirkel- und Linealkonstruktionen*“ spielen in diesem Zusammenhang eine grundlegende Rolle und wir wollen uns der Frage zuwenden, welche Konstruktionen nur unter Verwendung dieser beiden Werkzeuge möglich sind.

Vorausgesetzt wird dabei lediglich die Gültigkeit geometrischer Sätze, die wir bereits aus dem Schulunterricht kennen, wie zum Beispiel der Kongruenzsätze im Dreieck oder des Strahlensatzes.

Die Grundkonzepte hinter diesen Konstruktionen wurden schon vor etwa zweieinhalb Jahrtausenden von Euklid in den Postulaten seines großen Hauptwerks, den *Elementen*, festgehalten.

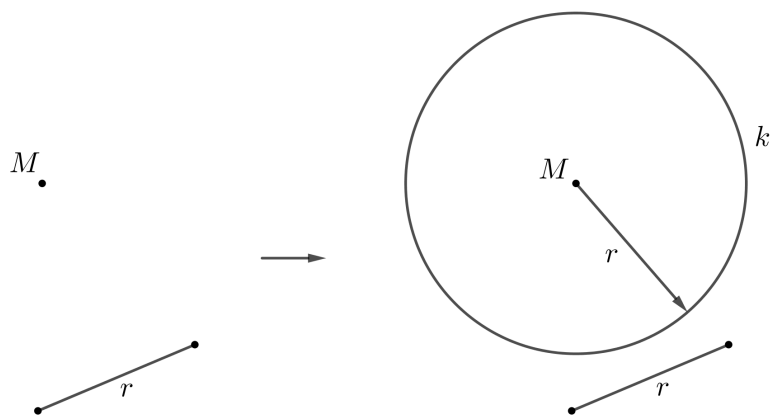
Euklid „erlaubt“ uns, folgende Konstruktionen durchzuführen:

- 1) Mit einem Lineal kann die Verbindungsstrecke  $PQ$  zweier Punkte  $P$  und  $Q$  konstruiert werden. Außerdem kann jede Strecke mit Hilfe des Lineals beliebig verlängert werden:

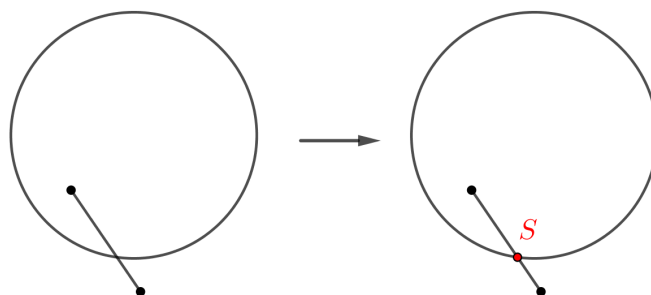



*Datum:* 17. November 2022.

2) Mit einem Zirkel kann der Kreis  $k$  mit einem gegebenen Mittelpunkt  $M$  und einem (als Länge einer Strecke) gegebenen Radius  $r$  konstruiert werden:



3) Zusätzlich „erlaubt“ uns Euklid, beliebige Punkte, Strecken oder Kreise, ohne Zusammenhang mit möglicherweise bereits vorhandenen Objekten, in der Konstruktion festzulegen. Ein Punkt, der sich auf zwei bereits bestimmten Objekten (also z.B. auf einer Strecke und einem Kreis oder auf auf zwei Strecken) befindet, wird als „Schnittpunkt“ dieser Objekte bezeichnet, und steht für weitere Konstruktionsschritte zur Verfügung.



Euklidische Konstruktionen 

Jede endliche Abfolge dieser drei Konstruktionsschritte heißt **euklidische Konstruktion**.

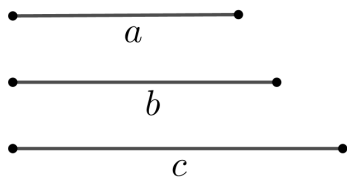
„Wie weit kommen wir nur mit Zirkel und Lineal?“

Alle Zeichenschritte, die nicht durch eine endliche Abfolge derartiger Konstruktionen ersetzt werden können, gelten nicht als euklidische Konstruktionen, bzw. als Zirkel- und Linealkonstruktionen in strengem Sinn<sup>1</sup>. So gibt es also im Zusammenhang mit euklidischen Konstruktionen kein Konzept von Maßzahlen, mit Ausnahme von Vielfachen einer gegebenen Streckenlänge oder eines gegebenen Winkels, und somit zum Beispiel keine Zentimetermaße oder Gradmaße<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Die Begriffe „euklidische Konstruktion“ und „Zirkel- und Linealkonstruktion“ sind in diesem Kontext völlig gleichbedeutend.

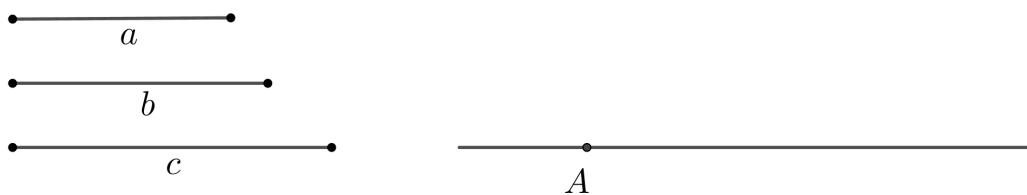
<sup>2</sup> Werden im Zuge einer geometrischen Konstruktionsaufgabe gewisse Bestimmungsstücke durch Maßeinheiten gegeben, sind diese so zu interpretieren, dass die verwendeten Maßeinheiten, wie etwa 1 cm oder 1°, in der Zeichnung bereits vorgegeben sind.

**Konstruktion 1.** Konstruiere ein Dreieck  $ABC$  mit den gegebenen Seitenlängen  $a$ ,  $b$  und  $c$ .

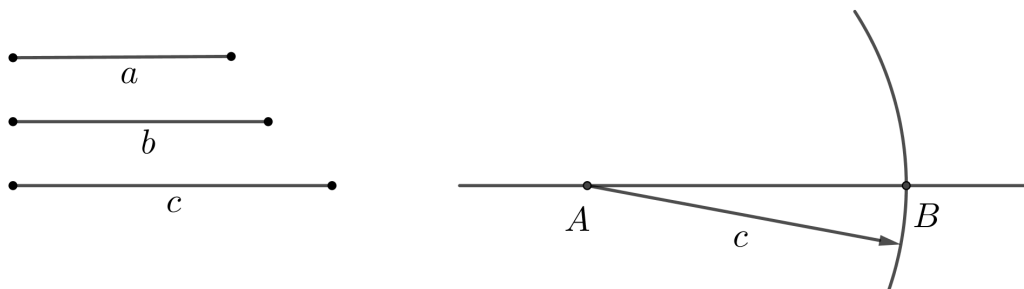


*Lösung.*

- 1) Als Erstes zeichnen wir eine beliebige Gerade mit einem beliebigen, daraufliegenden Punkt, den wir als  $A$  bezeichnen.

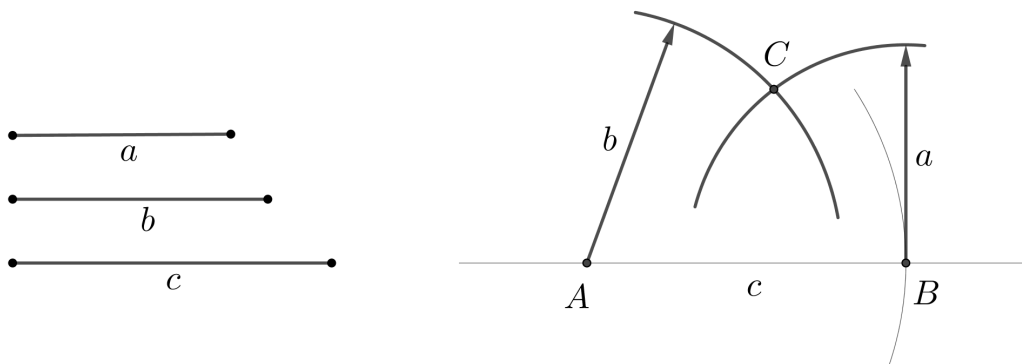


- 2) Mit dem Zirkel können wir nun den Kreis mit Mittelpunkt  $A$  und Radius  $c$  zeichnen (in der Figur ist nur ein Bogenstück dieses Kreises dargestellt), und wir bezeichnen den Schnittpunkt dieses Kreises mit der zu Beginn festgelegten Gerade als  $B$ .

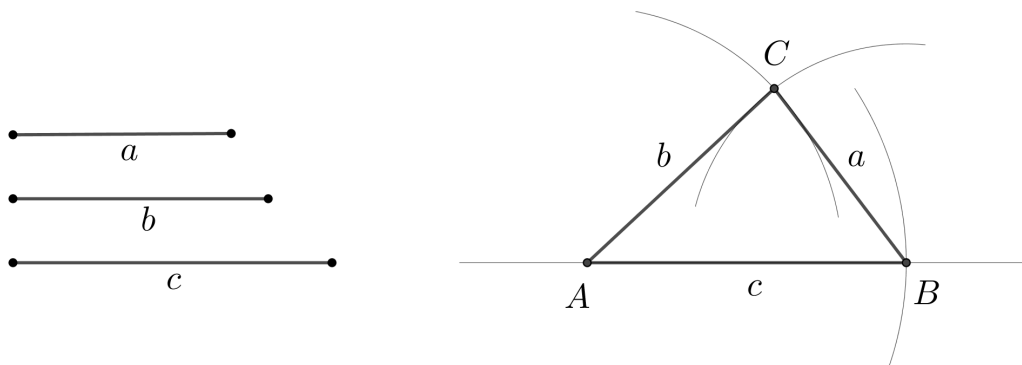


Die Länge der Strecke  $AB$  ist dann sicher gleich dem Kreisradius  $c$ .

- 3) Zeichnen wir nun den Kreis mit Mittelpunkt  $A$  und Radius  $b$ , sowie den Kreis mit Mittelpunkt  $B$  und Radius  $a$  (von diesen Kreisen sind wiederum nur Bogenstücke dargestellt), so schneiden sich diese beiden Kreise in einem Punkt, der den Abstand  $a$  von  $B$  und den Abstand  $b$  von  $A$  hat.



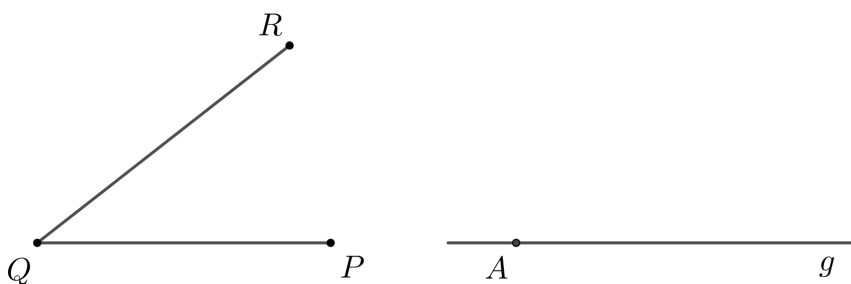
Wir bezeichnen diesen Punkt als  $C$ . Da die Länge der Strecke  $AB$  gleich  $c$  ist, und aufgrund dieses Konstruktionsschrittes auch die Länge der Strecke  $BC$  gleich  $a$  ist, und die Länge der Strecke  $CA$  gleich  $b$ , hat das Dreieck  $ABC$ , wie gefordert, die Seitenlängen  $a$ ,  $b$  und  $c$ .



Wir stellen fest, dass die Punkte  $B$  und  $C$  jeweils nicht eindeutig sind, da die Schnittpunkte der Kreise mit der Geraden bzw. miteinander nicht eindeutig sind. Da aber schon die Lage der Trägergerade von  $AB$ , sowie die Lage von  $A$  auf dieser Geraden, beliebig waren, gibt es ohnehin beliebig viele konstruierbare Dreiecke mit diesen Seitenlängen. □

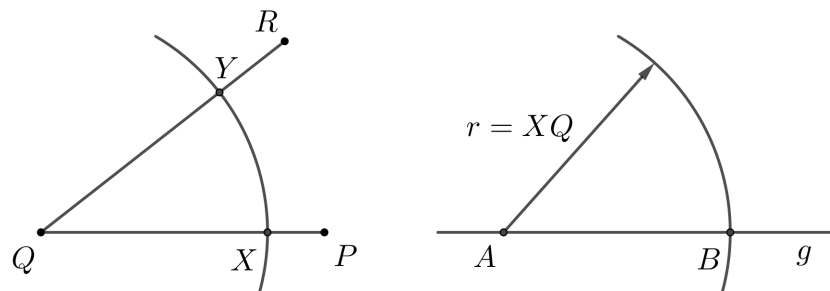
In Konstruktion 1 haben wir schon erkannt, wie man mit Hilfe der erlaubten Konstruktionsschritte eine Strecke gegebener Länge  $c$  auf eine gegebene Gerade von einem gegebenen Punkt  $A$  aus auftragen kann. Ebenso wichtig ist es, mit Hilfe erlaubter Konstruktionsschritte einen Winkel gegebener Größe von einem gegebenen Schenkel mit einem gegebenen Scheitel zu übertragen. Wie dies durchgeführt werden kann, ist in der folgenden Konstruktion 2 dargestellt.

**Konstruktion 2.** Übertrage den gegebenen Winkel  $\angle PQR$  so, dass der Scheitel des Winkels im gegebenen Punkt  $A$  liegt und ein Schenkel auf der gegebenen Geraden  $g$ .

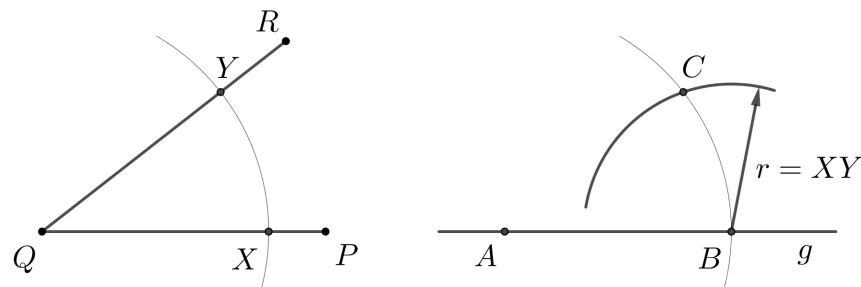


*Lösung.*

- 1) Um dieses Ziel zu erreichen, zeichnen wir zunächst einen Kreis mit Mittelpunkt  $Q$ , der die Strecke  $PQ$  in einem beliebigen Punkt  $X$  und die Strecke  $RQ$  in einem beliebigen Punkt  $Y$  schneidet. Außerdem zeichnen wir einen Kreis mit dem gleichen Radius  $r = XQ$  und Mittelpunkt  $A$  und bezeichnen den Schnittpunkt dieses Kreises mit  $g$  als  $B$ .



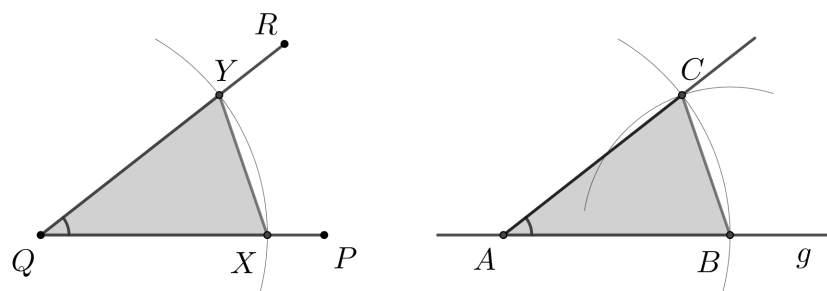
- 2) Nun zeichnen wir den Kreis mit Mittelpunkt  $B$  und Radius  $r = XY$ , und bestimmen den Schnittpunkt  $C$  dieses Kreises mit dem zuletzt gezeichneten Kreis mit Mittelpunkt  $A$ .



- 3) Verbinden wir diesen Punkt  $C$  mit dem gegebenen Punkt  $A$ , erkennen wir, dass

$$AB = QX, AC = QY \quad \text{und} \quad BC = XY$$

gilt. Die Dreiecke  $QXY$  und  $ABC$  sind somit nach dem Seiten-Seiten-Seiten Satz kongruent.



Es gilt also  $\angle BAC = \angle XQY$ . Wir haben den gegebenen Winkel also mit einer Folge von euklidischen Konstruktionsschritten übertragen. □