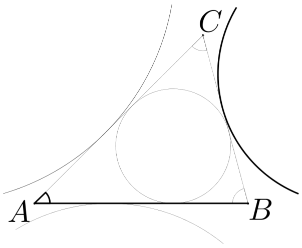
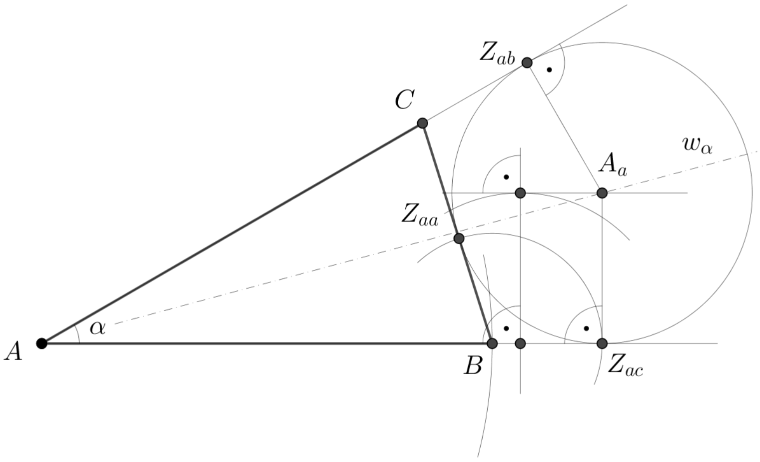
**Eine Seite, anliegender Winkel und zugehöriger Ankreisradius**

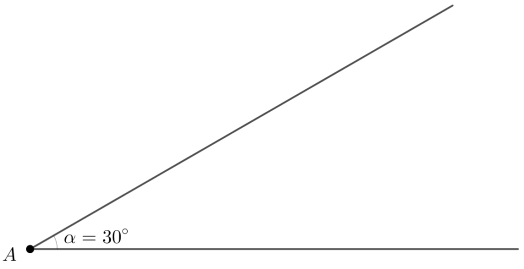
**Aufgabe 1.** *Konstruiere ein Dreieck mit* $\alpha = 30°$, $c = 6\,\text{cm}$ *und* $\rho_a = 2\,\text{cm}$.



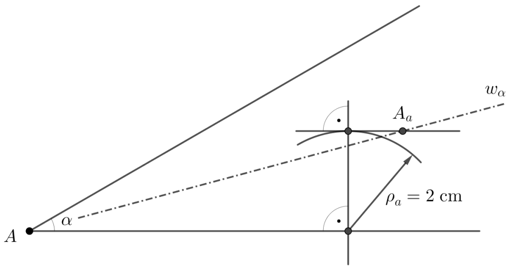



*Lösung.*

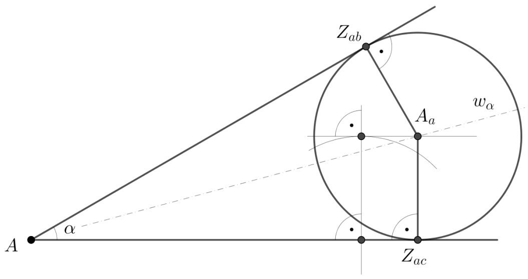
Als ersten Schritt zeichnen wir den Winkel $\alpha = 30°$ im Eckpunkt $A$.



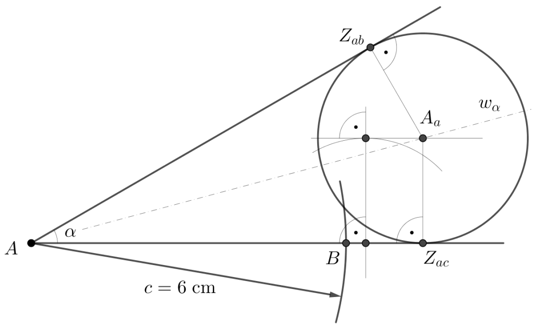

Da der Ankreismittelpunkt $A_a$ auf der Winkelsymmetrale $w_\alpha$ liegt, konstruieren wir diese. Da ferner der Normalabstand von $A_a$ zu den Schenkeln von $\alpha$ mit $\rho_a = 2\,\text{cm}$ gegeben ist, liegt $A_a$ auch auf den Parallelen zu den Schenkeln von $\alpha$ im Abstand $\rho_a$. Wir konstruieren eine solche Parallele als Normale zu einer beliebigen Normalen des waagrechten Schenkels, und erhalten somit den Ankreismittelpunkt $A_a$ als Schnittpunkt dieser Parallelen mit $w_\alpha$.



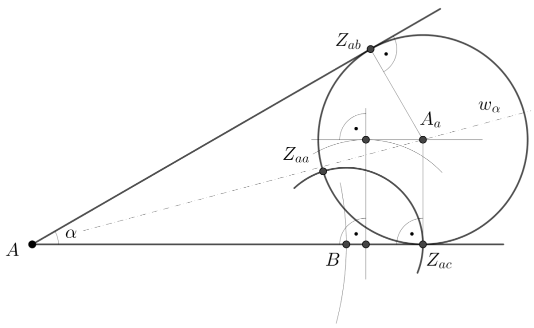

Wir erhalten dann die Berührpunkte $Z_{ab}$ und $Z_{ac}$ der Schenkel von $\alpha$ mit dem Ankreis als Lotfußpunkte von $A_a$ auf diese Schenkel, womit wir auch den Ankreis einzeichnen können.

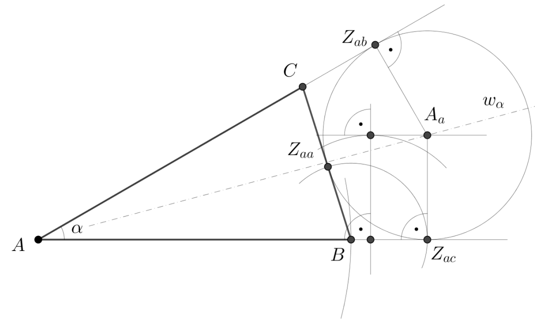



Im nächsten Schritt bestimmen wir den Eckpunkt $B$ als Schnittpunkt des Schenkels $AZ_{ac}$ von $\alpha$ mit dem Kreis mit Mittelpunkt $A$ und Radius $c = 6\,\text{cm}$.




Nun wissen wir, dass die Tangentialstrecken von $B$ an den Ankreis des Dreiecks gleich lang sind. Der Berührpunkt $Z_{aa}$ mit der Seite $a$ hat also denselben Abstand von $B$ wie $Z_{ac}$, und wir erhalten diesen Punkt daher als Schnittpunkt des Ankreises mit dem Kreis mit Mittelpunkt in $B$ durch $Z_{ac}$.



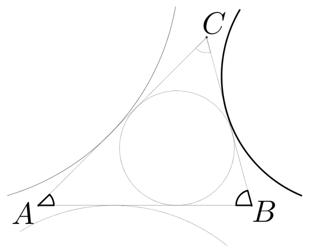


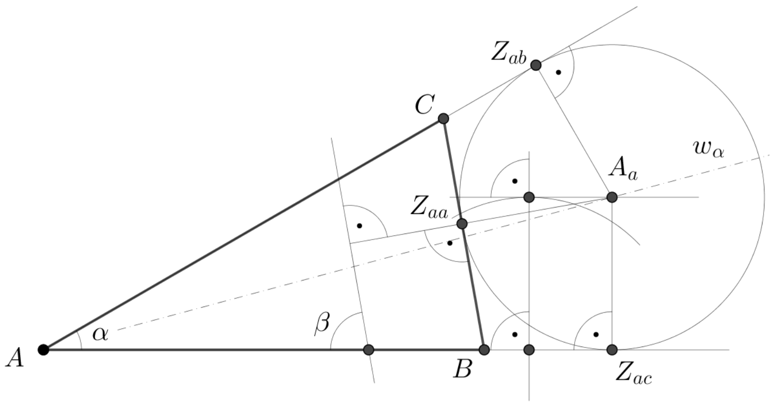

Da wir den Eckpunkt $C$ schließlich als Schnittpunkt von $AZ_{ab}$ mit $BZ_{aa}$ erhalten, ist die Konstruktion somit komplett.

□

**Zwei Winkel und ein Ankreisradius**

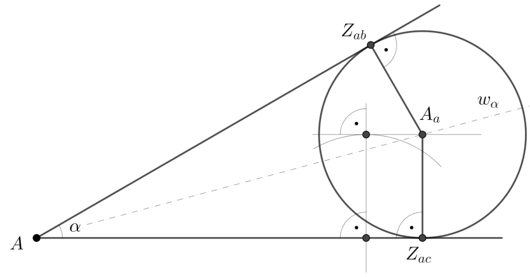
**Aufgabe 2.** *Konstruiere ein Dreieck mit* $\alpha = 30°$, $\beta = 80°$ *und* $\rho_a = 2\,\text{cm}$.



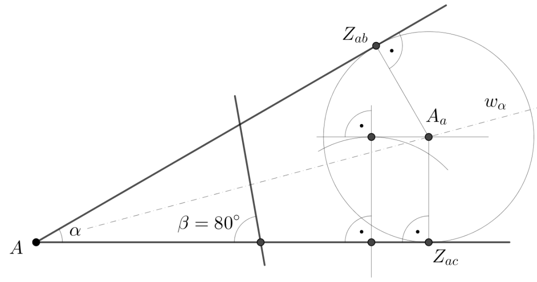



*Lösung.*

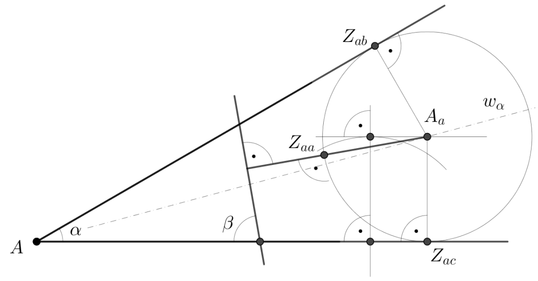
Da die Werte von $\alpha = 30°$ und $\rho_a = 2\,\text{cm}$ dieselben wie in Aufgabe 1 sind, verlaufen alle Konstruktionen bis zum Zeichnen des Ankreises gleich wie dort bereits besprochen.



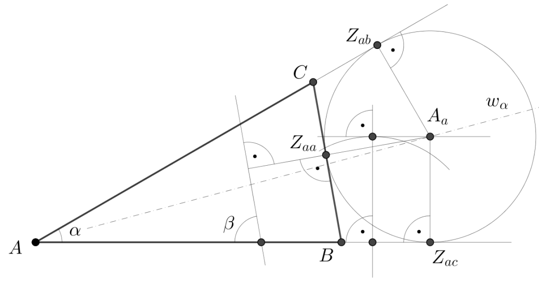

Nun konstruieren wir in einem beliebigen Punkt des Schenkels $AZ_{ac}$ eine Gerade, die mit diesem Schenkel den Winkel $\beta = 80°$ einschließt.




Diese Gerade ist Parallel zur Seite $a$ des Dreiecks. Da diese Seite auch eine Tangente des Ankreises ist, müssen wir sie nun derart parallel verschieben, dass die verschobene Gerade eine solche Tangente ist. Dies erreichen wir indem wir das Lot von $A_a$ auf die Gerade konstruieren, und dieses Lot mit dem Ankreis schneiden.



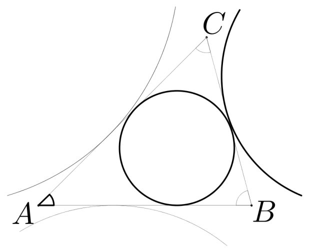

Dieser Schnittpunkt ist dann der Berührpunkt $Z_{aa}$, und wir erhalten schließlich die Seite $a = BC$ als Normale zu diesem Lot durch $Z_{aa}$.

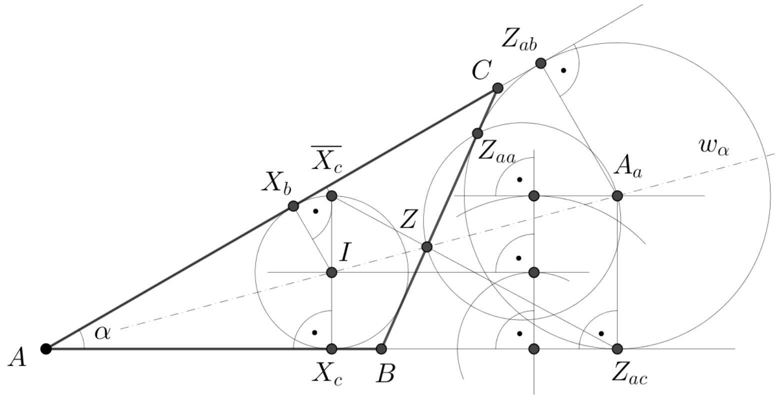



□

**Ein Winkel, Inkreisradius und ein Ankreisradius**

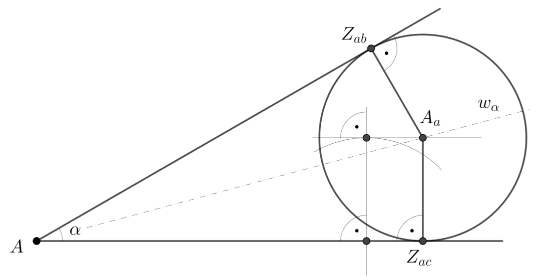
**Aufgabe 3.** *Konstruiere ein Dreieck mit* $\alpha = 30°$, $\rho = 1\,\text{cm}$ *und* $\rho_a = 2\,\text{cm}$.



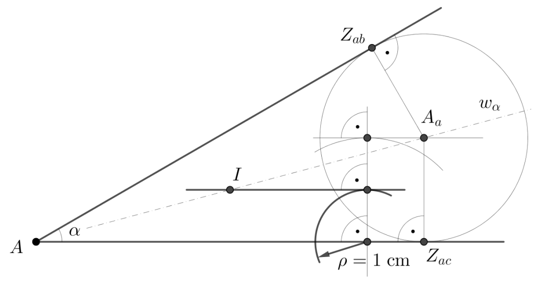



*Lösung.*

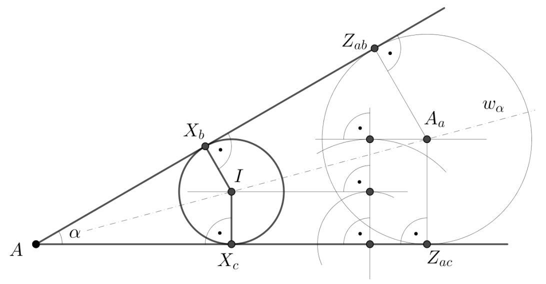
Wieder sind die Werte von $\alpha = 30°$ und $\rho_a = 2\,\text{cm}$ dieselben wie in Aufgabe 1, und es verlaufen somit wiederum alle Konstruktionen bis zum Zeichnen des Ankreises gleich wie dort besprochen.



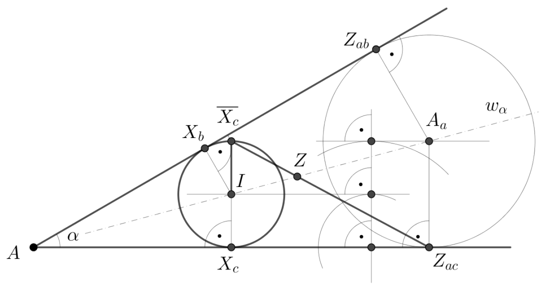

Da der Inkreismittelpunkt $I$ ebenfalls auf der Winkelsymmetrale $w_\alpha$ liegt, erhalten wir $I$ analog zur Bestimmung von $A_a$ als Schnittpunkt der Parallelen zum waagrechten Schenkel von $\alpha$ im Abstand $\rho$ mit $w_\alpha$.



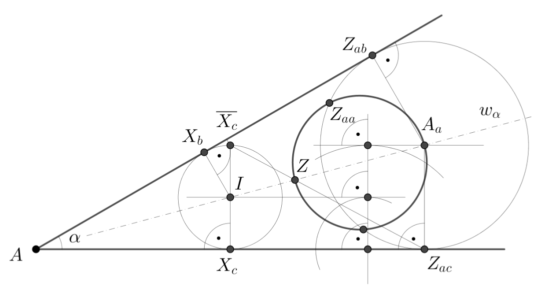

Die Berührpunkte $X_b$ und $X_c$ der Schenkel von $\alpha$ mit dem Inkreis erhalten wir wieder als Lotfußpunkte von $I$ auf diese Schenkel, womit wir auch den Inkreis einzeichnen können.



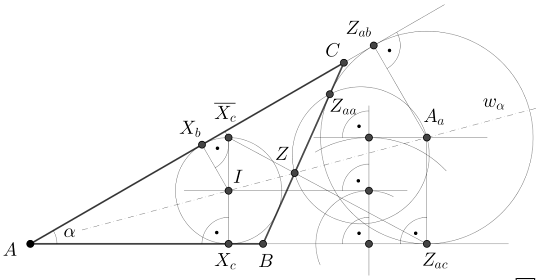

Nun ist die Seite $a$ von $\triangle ABC$ eine gemeinsame innere Tangente des Inkreises und des Ankreises. Um eine solche gemeinsame Tangente zu konstruieren, können wir nun folgendermaßen vorgehen.
Die gemeinsamen Innentangenten zweier Kreise gehen immer durch das innere Ähnlichkeitszentrum $Z$ dieser beiden Kreise. Wir wissen, dass dieser Punkt $Z$ auf der Verbinding $w_\alpha$ der Kreismittelpunkte liegt. Da die zentrische Streckung, die den Ankreis auf den Inkreis abbildet, senkrechte Radien auf senkrechte Radien abbildet, bildet sie den Punkt $Z_{ac}$ auf den zu $X_c$ bezüglich $I$ symmetrischen Punkt $\overline{X_c}$ ab. Wir erhalten $Z$ also als Schnittpunkt von $IA_a$ und $Z_{ac}\overline{X_c}$.




Um die Tangenten an den Ankreis durch $Z$ zu bestimmen, machen wir uns die Tatsache zunutze, wonach eine Tangente normal zum Berührradius steht. Der Berührpunkt $Z_{aa}$ der Tangente an den Ankreis durch $Z$ muss daher auf dem Thaleskreis über die Strecke $ZA_a$ liegen.



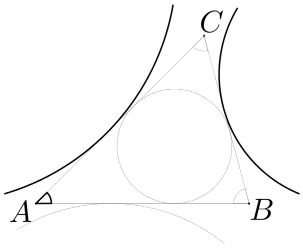
Wir erhalten also die Seite $a = BC$ als Verbindungsgerade von $Z$ mit $Z_{aa}$, wobei wir bemerken, dass es zwei symmetrische Lagen von $Z_{aa}$ bezüglich $w_\alpha$ gibt. In der Figur ist die obere Lage von $Z_{aa}$ für die Ausführung der Lösung ausgewählt worden.

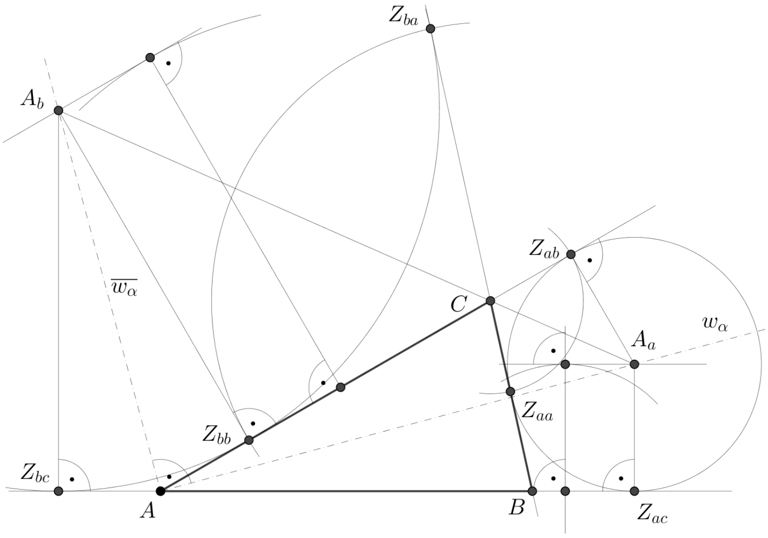



□

**Ein Winkel und zwei Ankreisradien**

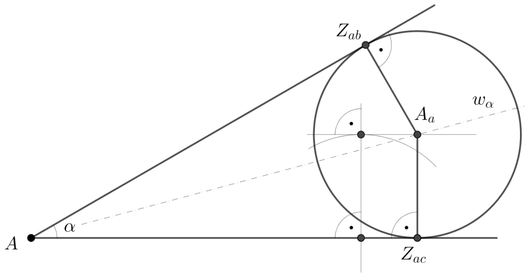
**Aufgabe 4.** *Konstruiere ein Dreieck mit* $\alpha = 30°$, $\rho_a = 2\,\text{cm}$ *und* $\rho_b = 6\,\text{cm}$.



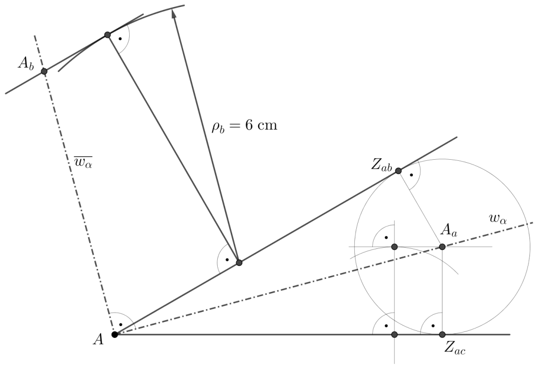



*Lösung.*

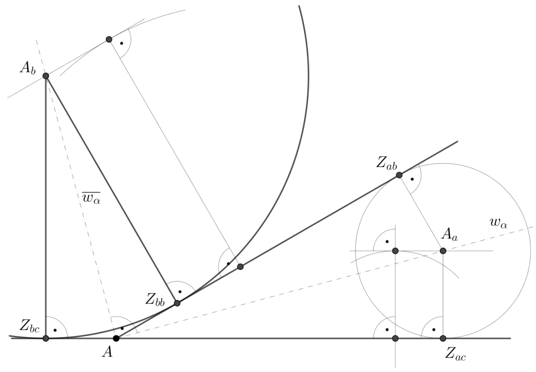
Nochmals sind die Werte von $\alpha = 30^\circ$ und $\rho_a = 2\,\text{cm}$ dieselben wie in Aufgabe 1, und wiederum verlaufen alle Konstruktionen bis zum Zeichnen des Ankreises gleich wie dort besprochen.




Wir nehmen an, dass $B$ auf dem waagrechten Schenkel des Winkels $\alpha$ liegt. Dann berührt der Ankreis mit dem Radius $\rho_b$ die Verlängerung dieses Schenkels jenseits von $A$ von oben und den anderen Schenkel von $\alpha$ von links oben. Der Mittelpunkt $A_b$ hat den Normalabstand $\rho_b$ zu diesen beiden Geraden, und wir können $A_b$ somit als Schnittpunkt der beiden Parallelen zu den Schenkeln von $\alpha$ in diesem Abstand bestimmen. Darüber hinaus wissen wir auch, dass $A_b$ auf der Außenwinkelsymmetrale $\overline{w_\alpha}$ von $\alpha$ liegt, und daher auf der Normalen zu $w_\alpha$ in $A$.

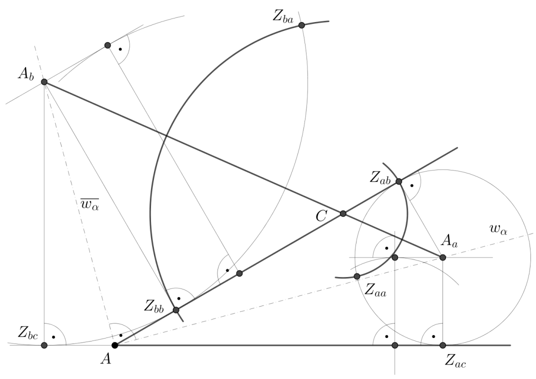


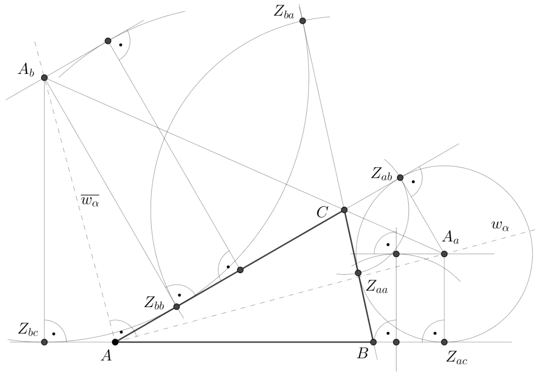

Nun erhalten wir die Berührpunkte $Z_{bc}$ bzw. $Z_{bb}$ des Ankreises mit Mittelpunkt $A_b$ mit den Dreiecksseiten als Lotfußpunkte von $A_b$ auf die beiden Schenkel von $\alpha$. Wir können also jetzt auch den Ankreis mit Mittelpunkt $A_b$ zeichnen.




Wie wir schon in der Lösung von Aufgabe 3 gesehen haben, gehen die gemeinsamen Innentangenten zweier Kreise immer durch das innere Ähnlichkeitszentrum $Z$ dieser beiden Kreise, das auf der Verbinding der Kreismittelpunkte liegt. In diesem Fall ist die Verbindung dieser beiden Mittelpunkte sicher die Außenwinkelsymmetrale des Winkels $\gamma$ von $ABC$. Weiters bildet die zentrische Streckung, die den einen Ankreis auf den anderen abbildet, die gemeinsame Tangente $Z_{ab}Z_{bb} = AC$ auf sich selbst ab.

Der Punkt $Z$ ist also der Schnittpunkt von $A_aA_b$ mit $Z_{ab}Z_{bb}$, und der Punkt $Z$ ist somit schon der Eckpunkt $C$ des Dreiecks. Da die Tangentialstrecken von $C$ an die Ankreise jeweils gleich lang sind, erhalten wir dann $Z_{aa}$ als Schnittpunkt des Ankreises an $a$ mit dem Kreis mit Mittelpunkt $C$ durch $Z_{ab}$, und $Z_{ba}$ als Schnittpunkt des Ankreises an $b$ mit dem Kreis mit Mittelpunkt $C$ durch $Z_{bb}$.

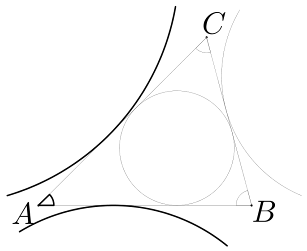


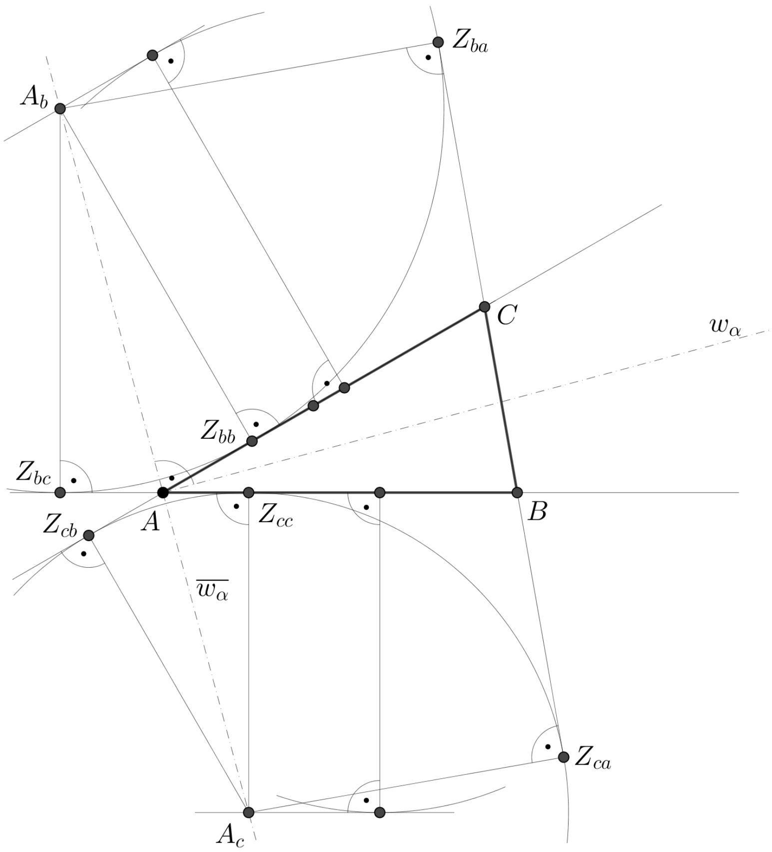



Schließlich erhalten wir den Eckpunkt $B$ als Schnittpunkt von $AZ_{ac}$ mit $CZ_{aa}$.

□

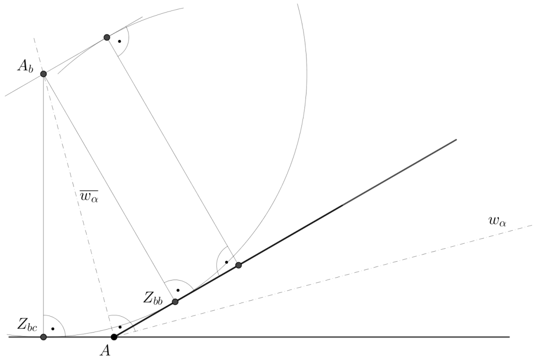
**Aufgabe 5.** *Konstruiere ein Dreieck mit* $\alpha = 30°$, $\rho_b = 6\,\text{cm}$ *und* $\rho_c = 5\,\text{cm}$.



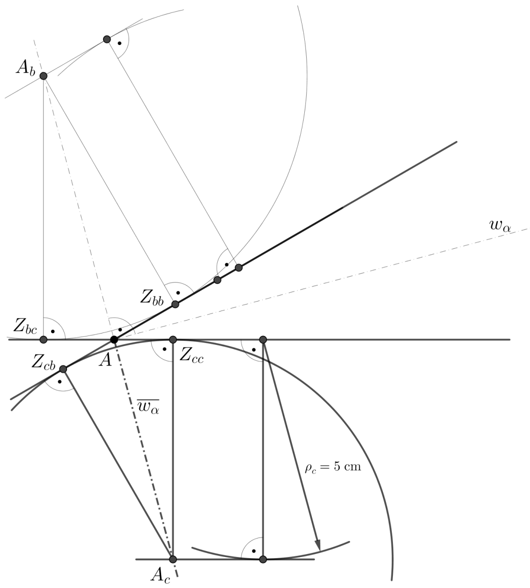



*Lösung.*

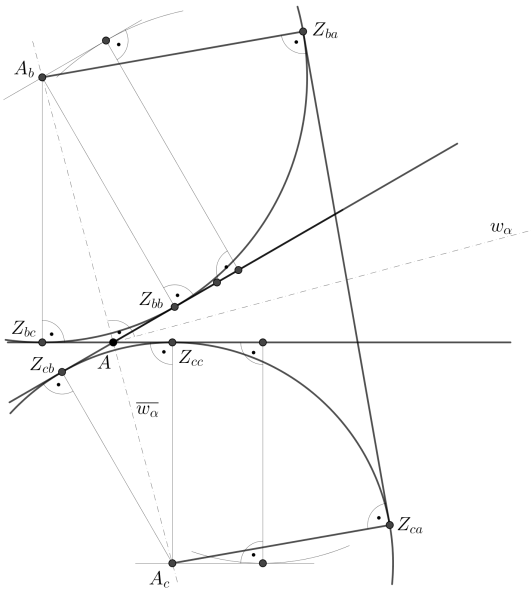
Da der Winkel $\alpha$ und der Ankreisradius $\rho_b$ mit den Angaben von Aufgabe 4 übereinstimmen, können wir auf gleiche Art wie in der Lösung von Aufgabe 4 den Winkel $\alpha$, die Winkelsymmetrale $w_\alpha$, die Außenwinkelsymmetrale $\overline{w_\alpha}$ und den Ankreismittelpunkt $A_b$ konstruieren.

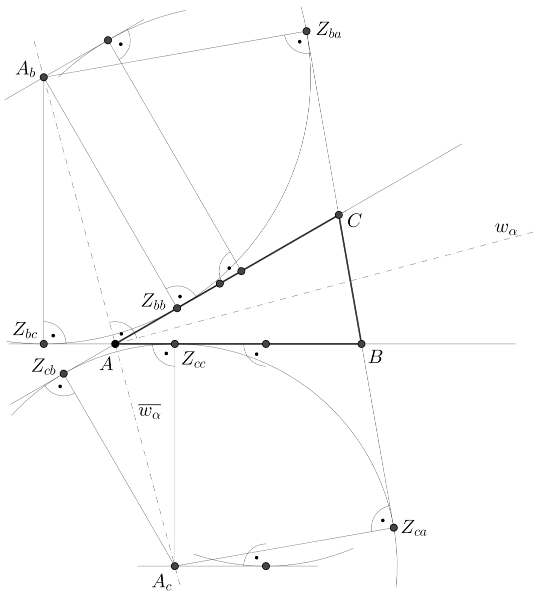



Da auch $\rho_c = 5\,\text{cm}$ gegeben ist, können wir nun auf der anderen Seite von $\alpha$ auf dieselbe Art auch den Ankreismittelpunkt $A_c$ konstruieren. Der Mittelpunkt $A_c$ hat den Normalabstand $\rho_c$ zu beiden Schenkeln von $\alpha$, und wir können $A_c$ somit als Schnittpunkt der beiden Parallelen zu den Schenkeln von $\alpha$ in diesem Abstand bestimmen, bzw. mit der Außenwinkelsymmetrale $\overline{w_\alpha}$ von $\alpha$, also der Normalen zu $w_\alpha$ in $A$. In der hier gezeichneten Figur ist die Parallele zum waagrechten Schenkel von $\alpha$ im Abstand $\rho_c$ als Normale im Abstand $\rho_c$ zur Normalen in einem beliebigen Punkt des waagrechten Schenkels konstruiert.




Die Seite $a$ des Dreiecks $ABC$ ist nun die gemeinsame Außentangente der beiden bereits bestimmten Ankreise auf derselben Seite von $A$ wie die Schenkel von $\alpha$. Diese gemeinsame Tangente kann im Prinzip unter Verwendung der zentrischen Ähnlichkeit der beiden Ankreise konstruiert werden, wie wir dies bereits in der Lösung von Aufgabe 3 getan haben. Da das Ähnlichkeitszentrum in diesem Fall aber weit jenseits der Zeichenfläche liegen würde, wurde diese gemeinsame Tangente in der Figur nur graphisch bestimmt. Die beiden Berührpunkte $Z_{ba}$ und $Z_{ca}$ ergeben sich als Lotfußpunkte von $A_b$ bzw. $A_c$ auf dieser gemeinsamen Tangente.






Die Eckpunkte $B$ und $C$ sind dann die Schnittpunkte dieser gemeinsamen Tangente mit den Schenkeln von $\alpha$, und die Konstruktion ist somit vollständig.

□