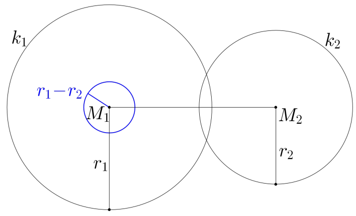
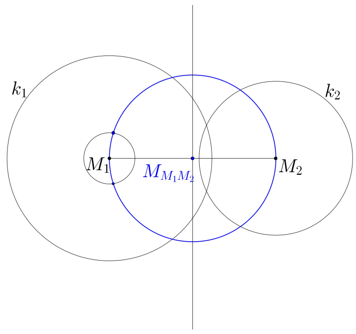
Äußere Tangenten mittels Hilfskreises

Die folgende Methode dient dazu, die sogenannten *äußeren Tangenten* an zwei Kreise mit Radius $r_1 > r_2$ und Mittelpunkten M_1 bzw. M_2 zu konstruieren.

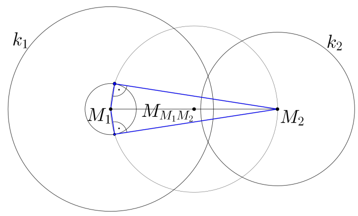
Zunächst konstruieren wir einen Kreis mit Mittelpunkt M_1 und Radius $r_1 - r_2$.



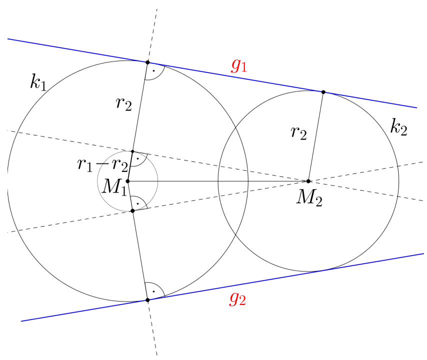
Wir konstruieren einen weiteren Kreis mit Mittelpunkt $M_{M_1M_2}$ und Radius $\frac{r_1+r_2}{2}$.



Erkläre, warum die beiden eingezeichneten Winkel 90° sind.
Thaleskreis über Strecke M_1M_2, rechter Winkel in Punkt, der auf diesem Kreis liegt.

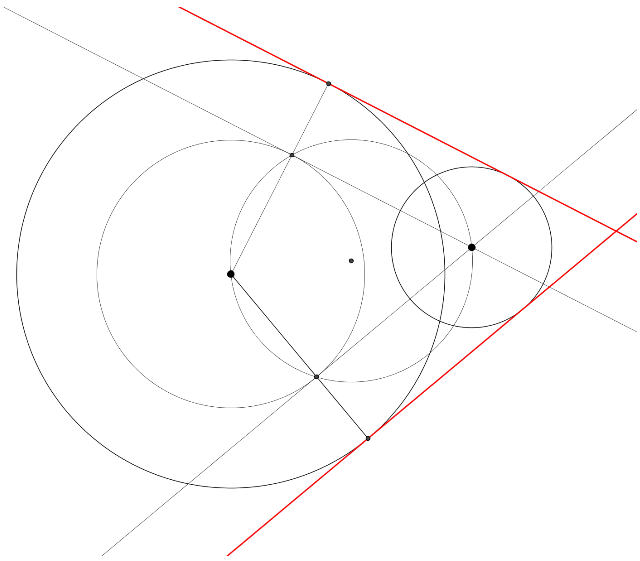


Erkläre, warum die beiden markierten Geraden gleichzeitig Tangenten an beide Kreise sind.
g_1: Der Abstand von Berührpunkt zu M_1 ist $r_1 - r_2 + r_2 = r_1$. g_1 steht im Berührpunkt normal auf den Radius und ist somit Tangente an k_1. Weiters ist das Viereck der beiden Berührpunkte und der beiden Mittelpunkte ein Rechteck, da die beiden Winkel in M_1 und M_2 ebenfalls 90° sind. Somit ist auch der Winkel im Berührpunkt von k_2 auf den Radius r_2 ein rechter Winkel, die Gerade also eine Tangente. Analog für g_2.



Äußere Tangenten

Aufgabe 1. *Konstruiere die beiden gemeinsamen äußeren Tangenten der beiden Kreise*

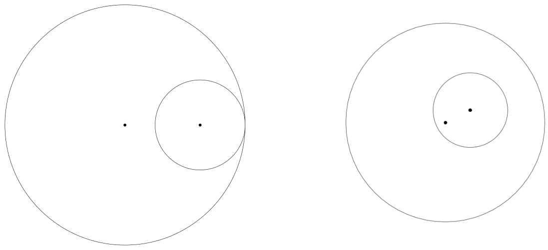


Äußere Tangenten

Diese Konstruktionsvorschrift funktioniert genau dann, wenn nicht einer der Kreise zur Gänze im Inneren des anderen Kreises liegt.
Beschreibe, was dieser Fall für die Existenz gemeinsamer äußerer Tangenten bedeutet.

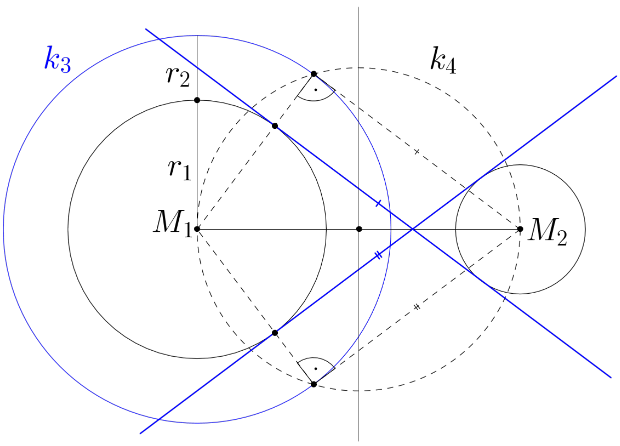
Bedenke, dass es hier zwei verschiedene Möglichkeiten für die Lagebeziehung der beiden Kreise gibt.

Im linken Fall gibt es eine gemeinsame Tangente im Berührpunkt, die normal auf die Verbindungsgerade der beiden Kreismittelpunkte steht. Im rechten Fall gibt es keine gemeinsame Tangente.



Innere Tangenten mittels Hilfskreises

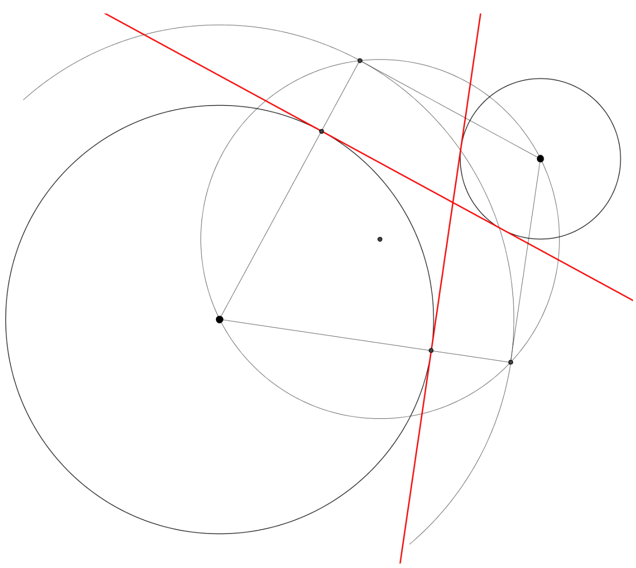
Gegeben sind wiederum zwei Kreise mit Mittelpunkten M_1 und M_2 und Radien r_1 bzw. r_2.
Gilt $M_1M_2 > r_1 + r_2$, so besitzt der Kreis neben den beiden äußeren auch zwei *innere Tangenten*.
Erkläre eine mögliche Konstruktionsvorschrift unter Zuhilfenahme der folgenden Abbildung:



k_3 ... Kreis mit Radius $r_1 + r_2$ und Mittelpunkt $M_{M_1M_2}$.
k_4 ... Thaleskreis über Strecke M_1M_2.
Somit rechter Winkel in den Schnittpunkten von k_3 mit k_4.
Parallelverschiebung um r_2 erhält die Winkel, somit Tangenten an beide Kreise, da $r_1 + r_2 - r_2 = r_1$ bzw. $0 + r_2 = r_2$ gilt.

Innere Tangenten

Aufgabe 2. *Konstruiere die beiden gemeinsamen inneren Tangenten der beiden Kreise*

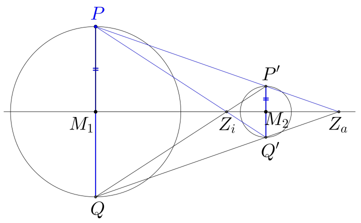


Gemeinsame Tangenten mittels zentrischer Streckung

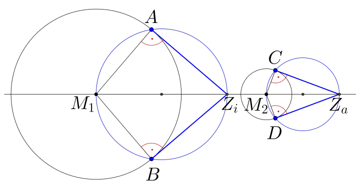
Gegeben sind wiederum zwei Kreise k_1 und k_2 mit Mittelpunkten M_1 und M_2 und Radien r_1 bzw. r_2 und $M_1M_2 > r_1 + r_2$.
Die beiden Kreise können durch zentrische Streckung ineinander übergeführt werden. Diese Eigenschaft nutzen wir für die Konstruktion der gemeinsamen inneren und äußeren Tangenten an die beiden Kreise.

Wähle einen beliebigen Punkt P auf k_1. Der Durchmesser durch P schneidet M_1 im Punkt Q. Verschiebe die Gerade PQ parallel durch M_2. Die Schnittpunkte mit k_2 nennen wir P' und Q'.

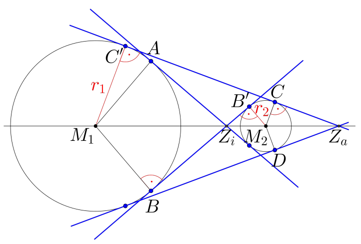
Erkläre wieso du durch das Schneiden von PQ' mit M_1M_2 das innere Ähnlichkeitszentrum Z_i erhältst und durch das Schneiden von PP' mit M_1M_2 das äußere Ähnlichkeitszentrum Z_a. Die beiden Punkte Z_i und Z_a liegen auf der Gerade M_1M_2. Parallele Radien M_2P' und M_1P werden bei der Streckung mit Zentrum Z_a aufeinander abgebildet. Also ist Z_a der Schnittpunkt von PP' mit M_1M_2. Analoges Argument für Z_i.



Erkläre die Konstruktion der Berührpunkte A, B, C und D der Tangenten durch die Ähnlichkeitszentren an die jeweiligen Kreise. Thaleskreis über Sehne M_1Z_i schneidet den Kreis k_1 in A und B und $\angle M_1AZ_i = \angle Z_iBM_1 = 90°$. Somit $Z_iA \perp CM_1$ und damit ist Z_iA Tangente an k_1 (Tangente steht normal auf Berührradius). Analog für Z_iB, Z_aC und ZaD.



Erkläre, warum die Gerade BZ_i den Kreis k_2 in B' berührt bzw. warum die Gerade CZ_a den Kreis k_1 in C' berührt. Zentrische Streckung mit Faktor $\frac{r_1}{r_2}$ mit Zentrum Z_a bildet C auf C' ab, der rechte Winkel bleibt erhalten und $M_1C' = r_1$. Somit ist Z_aC' Tangente an k_1. Analog: Z_iB' ist Tangente, da $M_2B' \perp M_2B'$ und $M_2B' = r_2$.



Dieselbe Überlegung zeigt auch, dass die beiden übrigen im letzten Schritt konstruierten Geraden AZ_i bzw. DZ_a gemeinsame Tangenten der beiden Kreise sind.

Wir haben demnach mithilfe der beiden Ähnlichkeitszentren alle vier Tangenten konstruieren können, sofern $M_1M_2 > r_1 + r_2$ ist.

Innere und äußere Tangenten

Aufgabe 3. *Bestimme alle Geraden, die vom Punkt A den Abstand* 2 cm *und vom Punkt B den Abstand* 5 cm *haben.*

Alle Punkte, die einen fixen Abstand zu einem gegebenen Punkt haben, liegen auf einem Kreis.