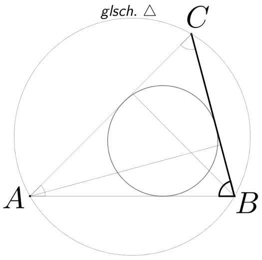
Lösungsfälle

Bei diesem Konstruktionsblatt beschäftigen wir uns mit der Konstruktion von gleichschenkeligen Dreiecken. Da in jedem Fall die Information gegeben ist, dass zwei Dreiecksseiten die gleiche Länge haben, genügt es zur Konstruktion, zwei weitere Bestimmungsstücke anzugeben. Wir müssen allerdings bei der Suche nach einer Konstruktion berücksichtigen, dass wir zunächst nicht wissen, *welche zwei der drei Seiten gleich lang sind*. Dies führt dazu, dass jeweils mehrere Fälle zu unterscheiden sind, die zu durchaus andersartigen Lösungen führen können. Bei Aufgabe 1 sind alle möglichen Fälle angeführt, bei allen weiteren Aufgaben sollen die zu unterscheidenden Fälle selbst überlegt werden.

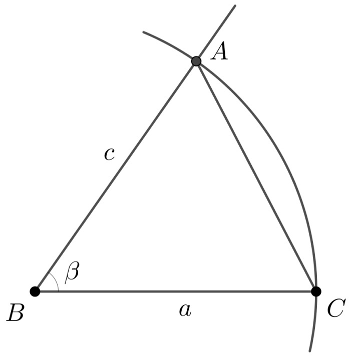
Bei den Konstruktionen wird es häufig nützlich sein zu berücksichtigen, dass ein gleichschenkeliges Dreieck immer eine *Symmetrieachse* besitzt, auf der sowohl der Höhenschnittpunkt als auch der Schwerpunkt, der Inkreismittelpunkt und der Umkreismittelpunkt des Dreiecks liegen.

Eine Seite und anliegender Winkel

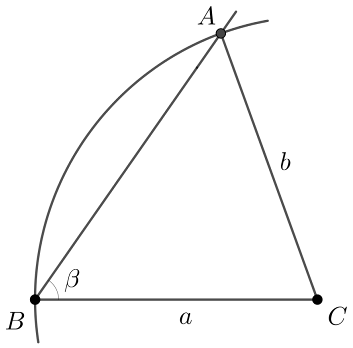
Aufgabe 1. *Konstruiere für jeden der 3 Fälle ein gleichschenkeliges Dreieck mit* $a = 6\,\text{cm}$ *und* $\beta = 55°$.



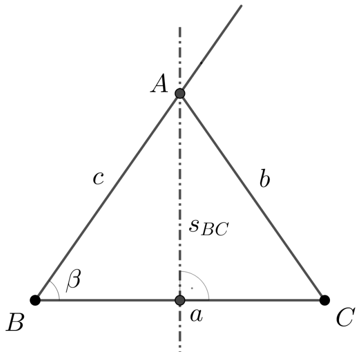
- $a = c$:



- $a = b$:

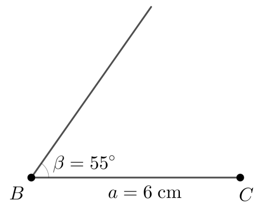


- $b = c$:



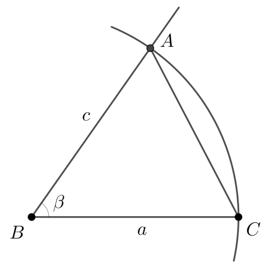
Lösung.

Als ersten Schritt zeichnen wir eine Strecke BC mit der Länge 6 cm. Im Eckpunkt B zeichnen wir den zweiten Schenkel des Winkels $\beta = 55°$.

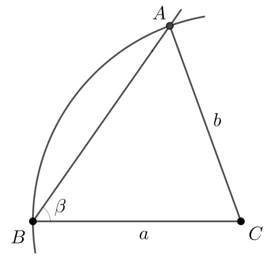


Nun gibt es drei mögliche Fälle. Wir wissen, dass das Dreieck ABC zwei gleich lange Seiten hat, aber wir wissen nicht welche zwei Seiten gleich lang sind. In jedem Fall liegt aber der Eckpunkt A auf dem bereits bestimmten zweiten Schenkel von β.

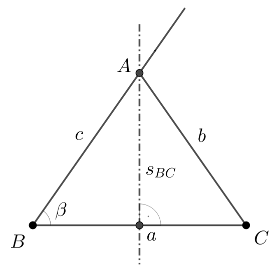
Gilt $a = c$, so gilt $BC = BA$ und wir erhalten den Eckpunkt A auf dem Kreisbogen durch C mit Mittelpunkt B.



Gilt $a = b$, so gilt $CB = CA$ und wir erhalten den Eckpunkt A auf dem Kreisbogen durch B mit Mittelpunkt C.



Gilt schließlich $b = c$, so gilt $AB = AC$. Der Eckpunkt A liegt daher in diesem Fall auf der Streckensymmetrale s_{BC} von BC.

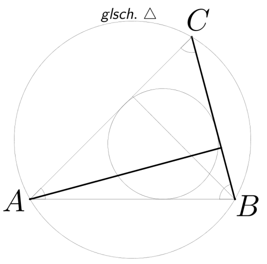


Wir erkennen, dass die drei Annahmen $a = c$, $a = b$ und $b = c$ zu jeweils unterschiedlichen Lösungen führen, die durch teilweise unterschiedliche Lösungswege ermittelt werden. Dies wird auch in den folgenden Aufgaben der Fall sein. Allerdings wird es bei einigen Aufgaben genügen, aufgrund der Symmetrie der Angabe, zwei Fälle zu betrachten.

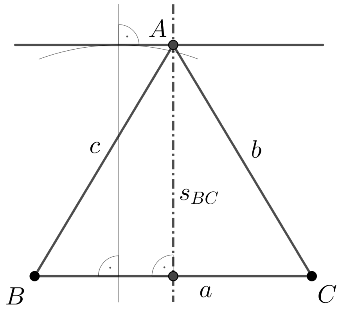
□

Eine Seite und zugehörige Höhe

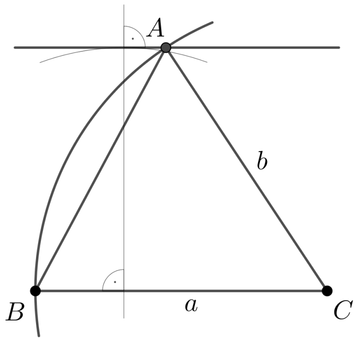
Aufgabe 2. *Konstruiere gleichschenkelige Dreiecke mit* $a = 6\,\text{cm}$ *und* $h_a = 5\,\text{cm}$.



- $b = c$:



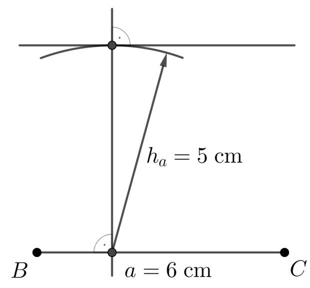
- $a = b$ (bzw. $a = c$):



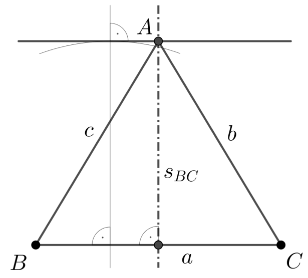
Der Fall $a = c$ liefert durch Vertauschung der Rollen von B und C eine dazu kongruente Lösung.

Lösung.

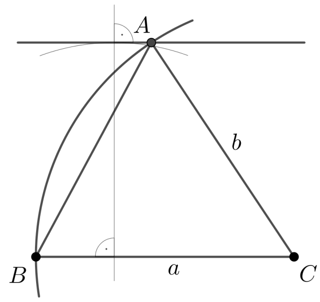
Als ersten Schritt zeichnen wir eine Strecke BC mit der Länge $a = 6\,\text{cm}$. Der Eckpunkt A liegt jedenfalls auf der Parallelen zu BC im Abstand $h_a = 5\,\text{cm}$, und diese konstruieren wir, wie üblich, als Normale zur Normalen in einem beliebigen Punkt von BC im Abstand h_a.



Nehmen wir nun an, dass $b = c$ gilt, so gilt auch $AB = AC$, und der Eckpunkt A liegt auf der Streckensymmetrale s_{BC} von BC.



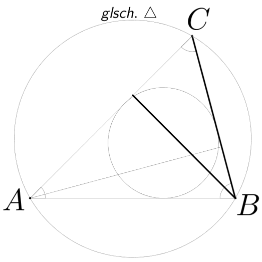
Gilt andererseits $a = b$, so gilt $CB = CA$, und wir erhalten den Eckpunkt A auf dem Kreisbogen durch B mit Mittelpunkt C.

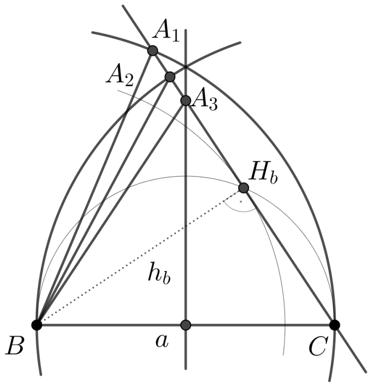


Da der Fall $a = c$ aus diesem durch Vertauschung der Rollen von B und C unmittelbar folgt, ergibt diese Annahme eine symmetrische, und somit kongruente, Lösung. □

Eine Seite und eine (nicht zugehörige) Höhe

Aufgabe 3. *Konstruiere gleichschenkelige Dreiecke mit* $a = 6\,\text{cm}$ *und* $h_b = 5\,\text{cm}$.

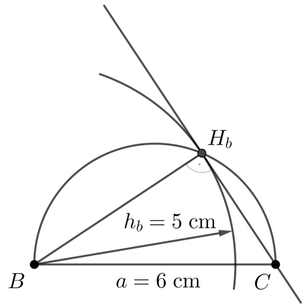




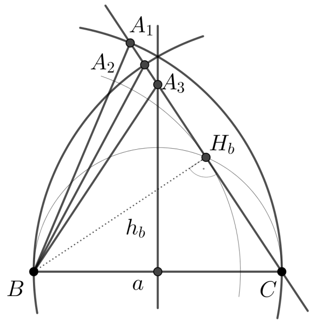
Im Fall $a = c$ ergibt sich die Lösung A_1, im Fall $a = b$ die Lösung A_2, und im Fall $b = c$ die Lösung A_3.

Lösung.

Als ersten Schritt zeichnen wir wieder eine Strecke BC mit der Länge $a = 6\,\text{cm}$. Wir wissen, dass die Höhe durch B zur Seite b normal steht. Der Höhenfußpunkt H_b liegt daher auf dem Thaleskreis über die Strecke BC. Andererseits hat aber H_b den Abstand h_b von B, und liegt somit auch auf dem Kreis mit Mittelpunkt B und Radius h_b. Wir erhalten also H_b als Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Thaleskreis über BC, und der Eckpunkt A liegt dann sicher auf der Geraden CH_b.



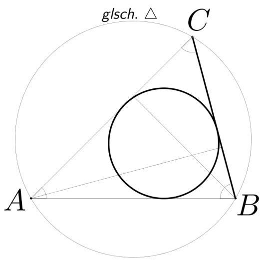
Je nachdem ob $a = c$, $a = b$ oder $b = c$ gilt, liegt A auf dem Kreisbogen durch C mit Mittelpunkt B, auf dem Kreisbogen durch B mit Mittelpunkt C bzw. auf der Streckensymmetrale von BC. In nebenstehender Zeichnung sind alle drei Fälle ausgeführt.
Im Fall $a = c$ ergibt sich die Lösung A_1, im Fall $a = b$ die Lösung A_2, und im Fall $b = c$ die Lösung A_3.

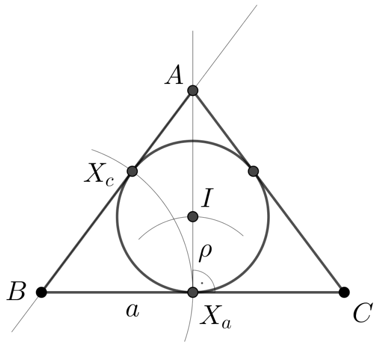


□

Eine Seite und Inkreisradius

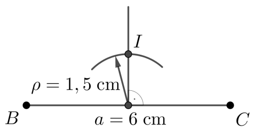
Aufgabe 4. *Konstruiere ein gleichschenkeliges Dreieck mit* $a = 6\,\text{cm}$ *und* $\rho = 1{,}5\,\text{cm}$.



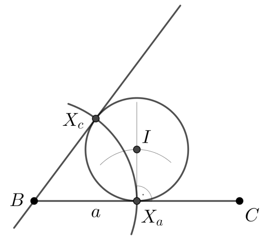


Lösung.
Die Aufgabe, mit euklidischen Mitteln Dreiecke unter der Vorgabe zweier Seitenlängen und des Inkreisradius ist im Allgemeinen unlösbar. Es ist daher zunächst nicht selbstverständlich, dass die Aufgabe in der hier gestellten Version eine euklidische Lösung hat. Im Fall, dass wir $b = c$ voraussetzen, liegt aber der Inkreismittelpunkt auf der Höhe h_a, die gleichzeitig Streckensymmetrale von BC ist. Der Berührpunkt X_a des Inkreises mit der Seite a ist somit in diesem Fall der Mittelpunkt von BC.

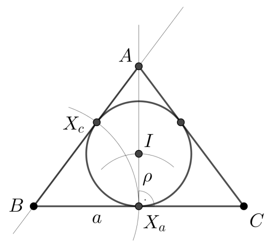
Im ersten Konstruktionsschritt bestimmen wir also zunächst eine Strecke BC mit der Länge $a = 6\,\text{cm}$. Der Inkreismittelpunkt I liegt dann auf der Normalen zu BC durch den Mittelpunkt von BC im Abstand $\rho = 1{,}5\,\text{cm}$.



Da die Tangentialstrecken von B an den Inkreis des Dreiecks gleich lang sind, erhalten wir den Berührpunkt X_c von c mit dem Inkreis als Schnittpunkt des Inkreises mit dem Kreis durch X_a und Mittelpunkt B.



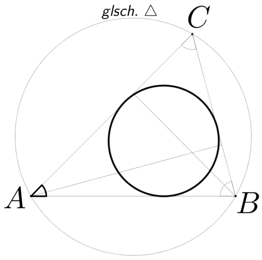
Der Eckpunkt A liegt nun sowohl auf der Geraden BX_c, als auch, aus Symmetriegründen, auf der Geraden X_aI, was die Konstruktion abschließt.



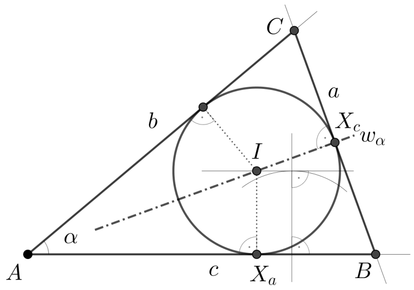
□

Ein Winkel und Inkreisradius

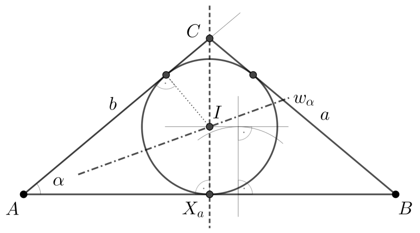
Aufgabe 5. *Konstruiere gleichschenkelige Dreiecke mit* $\alpha = 40°$ *und* $\rho = 2\,\text{cm}$.



- $b = c$:



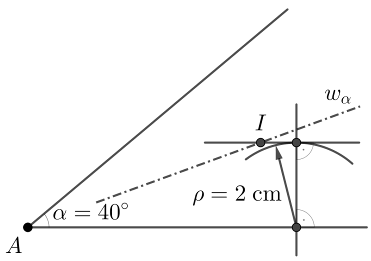
- $a = b$ (bzw. $a = c$):



Der Fall $a = c$ liefert durch Vertauschung der Rollen von B und C eine dazu kongruente Lösung.

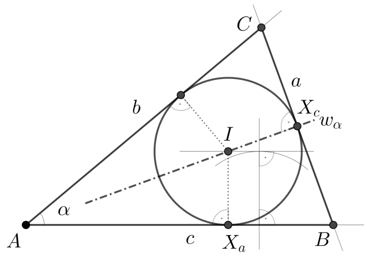
Lösung.

Als ersten Schritt zeichnen wir einen Winkel $\alpha = 40°$ mit Scheitel A. Auf dessen Schenkeln liegen die Seiten b und c des gesuchten Dreiecks. Da der Inkreismittelpunkt I von beiden Schenkeln den Normalabstand ρ hat, können wir I entweder als Schnittpunkt der beiden Parallelen zu diesen Schenkeln im Abstand ρ konstruieren, oder, wie in der Zeichnung, als Schnittpunkt einer dieser Parallelen mit der Winkelsymmetralen w_α.

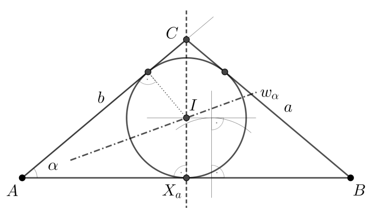


Nun gibt es zwei Möglichkeiten.

Wenn die beiden gleich langen Seiten von ABC durch A gehen (also, wenn $b = c$ gilt), ist w_α gleichzeitig die Höhe durch A. Die Seite a steht also normal zu w_α und geht durch den Punkt X_a, der im Schnittpunkt von w_α mit dem Inkreis liegt. Dieser Fall ist in folgender Zeichnung ausgeführt.



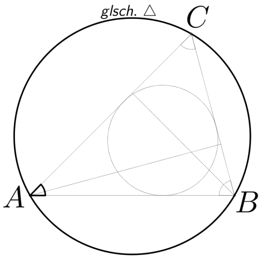
Ist aber die Seite a gleich lang wie eine der beiden anderen Seiten (z.B., wie in der Zeichnung ausgeführt, $a = b$), so liegt I aus Symmetriegründen auf der Höhe durch den gemeinsamen Endpunkt C der gleich langen Seiten. Wir erhalten also C als Schnittpunkt der Normalen zu einem Schenkel von α durch I mit dem anderen Schenkel.
Der Eckpunkt B liegt symmetrisch zu A bezüglich des Berührpunktes X_a.



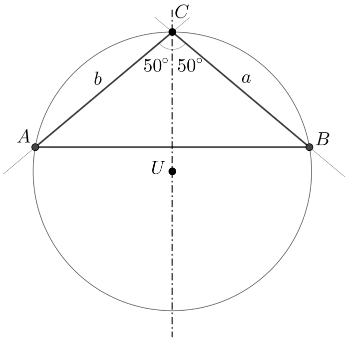
□

Ein Winkel und Umkreisradius

Aufgabe 6. *Konstruiere gleichschenkelige Dreiecke mit* $\alpha = 40°$ *und* $R = 4\,\text{cm}$.

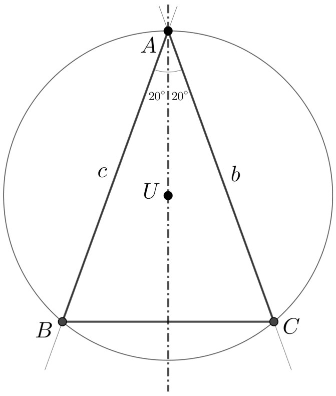


- $\alpha = \beta$ (bzw. $\alpha = \gamma$):



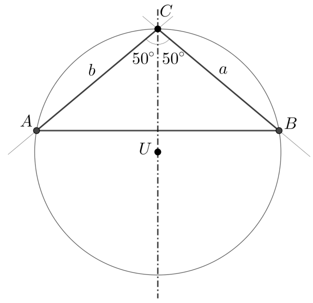
Der Fall $\alpha = \gamma$ liefert durch Vertauschung der Rollen von B und C eine dazu kongruente Lösung.

- $\beta = \gamma$:

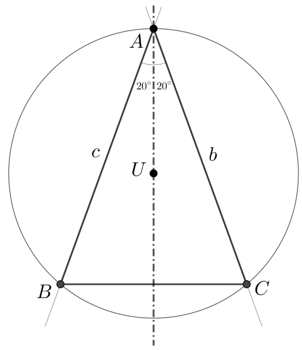


Lösung.
Wenn ein Winkel in einem gleichschenkeligen Dreieck gegeben ist, so kennen wir schon alle drei. Es gibt dabei immer zwei Möglichkiten. Gilt $\alpha = \beta = 40°$, so erhalten wir $\gamma = 180° - 2 \cdot 40° = 100°$, und gilt $\beta = \gamma$, so erhalten wir $\beta = \gamma = \frac{1}{2} \cdot (180° - 40°) = 70°$. In beiden Fällen ist die Winkelsymmetrale des Winkels, der von den gleich langen Seiten eingeschlossen wird, eine Symmetrieachse des Dreiecks, und der Umkreismittelpunkt liegt auf dieser Symmetrieachse.

Wir betrachten zuerst den erstgenannten Fall $\alpha = \beta = 40°$. Da $\gamma = 100°$ gilt, und die Seiten a und b symmetrisch bezüglich der Geraden CU liegen, erhalten wir die Punkte A und B indem wir dem Winkel $\frac{1}{2} \cdot \gamma = 50°$ in C von CU in beiden Richtungen auftragen und die resultierenden Winkelschenkel mit dem Umkreis schneiden. Dabei können wir C zunächst beliebig auf dem Umkreis liegend auswählen.



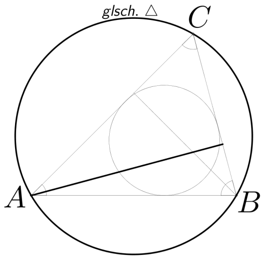
Der zweitgenannte Fall $\beta = \gamma$ ist ganz analog zu behandeln. Da $\alpha = 40°$ gilt, und die Seiten b und c symmetrisch bezüglich der Geraden AU liegen, erhalten wir die Punkte B und C indem wir dem Winkel $\frac{1}{2} \cdot \alpha = 20°$ in A von AU in beiden Richtungen auftragen und die resultierenden Winkelschenkel mit dem Umkreis schneiden. Analog zum ersten Fall können wir A wiederum beliebig auf dem Umkreis liegend auswählen.

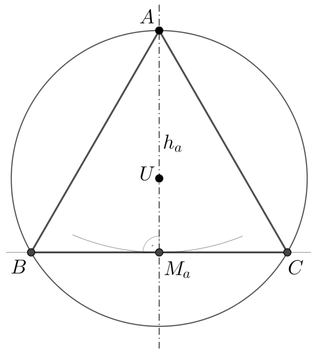


□

Eine Höhe und Umkreisradius

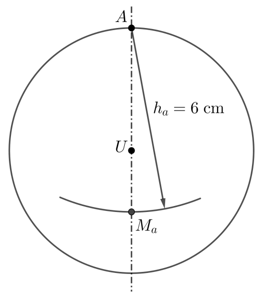
Aufgabe 7. *Konstruiere ein gleichschenkeliges Dreieck mit* $h_a = 6\,\text{cm}$ *und* $R = 4\,\text{cm}$.



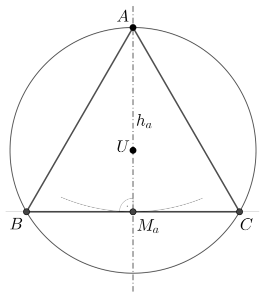


Lösung.
Ähnlich wie schon in Aufgabe 4, ist es gar nicht selbstverständlich, dass es zu dieser Aufgabe eine Lösung mit euklidischen Mitteln gibt. Nehmen wir aufgrund der Symmetrie im gleichschenkeligen Dreieck an, ist auch diese Angabe auf die Angabe von zwei Höhen und dem Umkreisradius zurückzuführen, und diese Angabe hat im Allgemeinen keine euklidische Lösung. Betrachten wir aber die Symmetrie so, dass die gegebene Höhe auf der Symmetrieachse liegt, reduziert sich die Konstruktion im Wesentlichen auf dieselbe, wie wir sie eben in Aufgabe 6 durchgefürt haben.

Nehmen wir also an, es liege der Eckpunkt A des Dreiecks ABC beliebig auf dem Umkreis und es seien die Seiten b und c gleich lang. Dann können wir sofort die Höhe h_a von A auf der Geraden AU auftragen, und erhalten so den Mittelpunkt M_a der Seite a.



Da das Dreieck bezüglich AU symmetrisch ist, erhalten wir nun BC normal zu AU durch M_a. Da B und C auf dem Umkreis liegen, ist die Konstruktion somit fertig.



□