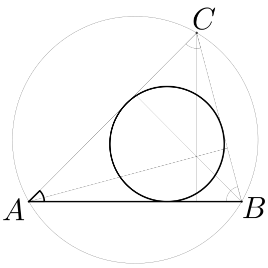
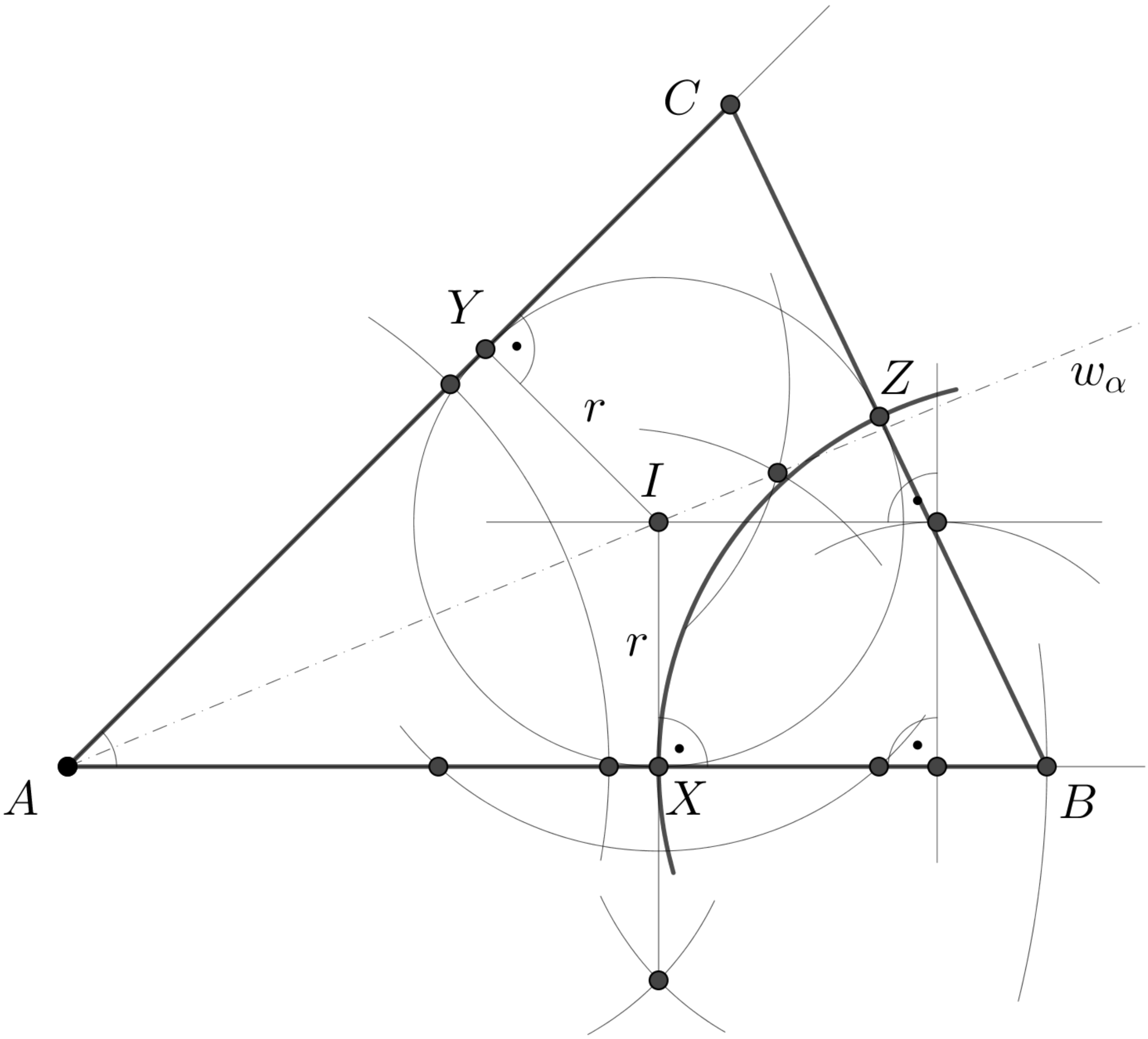
Inkreisradius, Seite und ein zugehöriger Winkel

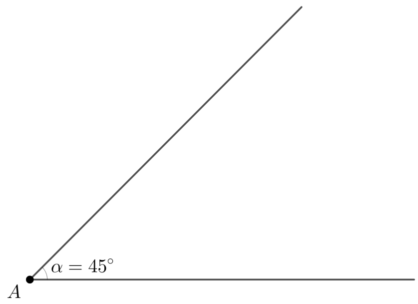
Aufgabe 1. *Konstruiere ein Dreieck mit* $r = 2{,}5\,\text{cm}$, $c = 10\,\text{cm}$ *und* $\alpha = 45°$.



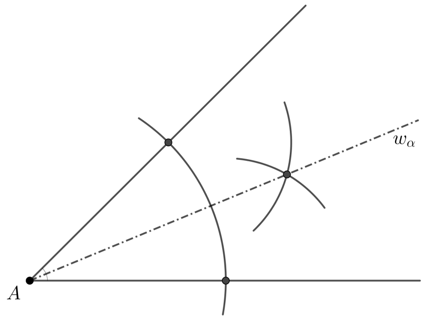


Lösung.

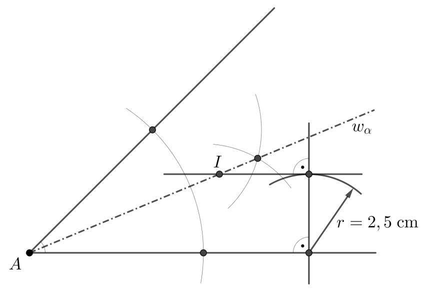
Als ersten Schritt zeichnen wir den Winkel $\alpha = 45°$ im Eckpunkt A.



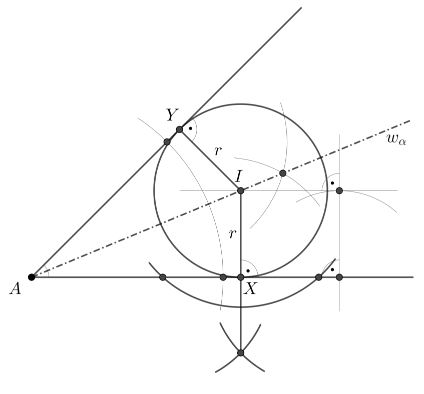
Da der Inkreisradius des Dreiecks ABC mit $r = 2{,}5\,\text{cm}$ gegeben ist, liegt der Inkreismittelpunkt I sowohl auf den Parallelen zu den beiden Schenkeln dieses Winkels im Abstand r als auch auf der Winkelsymmetrale w_α von α. Wir konstruieren also zuerst w_α.



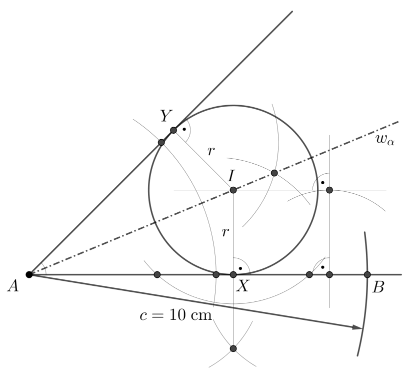
Um die Parallele zur Seite AC im Abstand r zu bestimmen, konstruieren wir zuerst in einem beliebigen Punkt dieser Geraden ein Normale. Auf dieser bestimmen wir den Punkt im Abstand r, und in diesem konstruieren wir wiederum die Normale, die dann parallel zu AC im Abstand r ist. Diese Parallele schneidet w_α im Inkreismittelpunkt I.



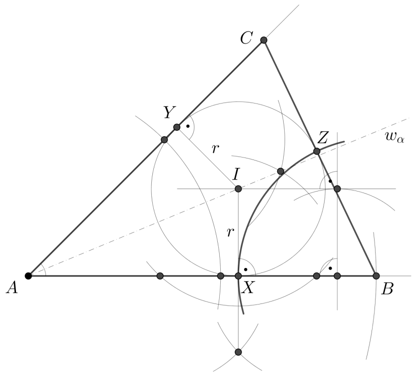
Die Lotfußpunkte von I auf die Schenkel des Winkels α sind die Berührpunkte X und Y des Inkreises mit den Seiten AB bzw. AC. (In der Zeichnung ist nur die Konstruktion von X ausgeführt. Ein Kreis mit Mittelpunkt in I und beliebigem Radius schneidet AB in zwei Punkten. Von diesen beiden werden gleiche Abstände mit dem Zirkel abgeschlagen, und der Schnittpunkt der resultierenden Kreisbögen liegt auf der Normalen zu AB durch I.) Wir können also den Inkreis von $\triangle ABC$ mit Mittelpunkt I durch X und Y zeichnen.



Ferner können wir auch den Eckpunkt B auf dem entsprechenden Schenkel von α mit $AB = c = 10\,\text{cm}$ bestimmen.



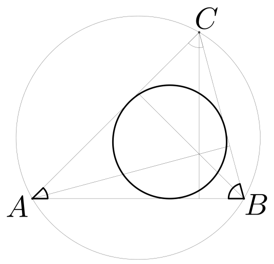
Da die beiden Tangentialstrecken von B an den Inkreis von $\triangle ABC$ gleich lang sind, erhalten wir den Berührpunkt von BC mit dem Inkreis als Schnittpunkt Z des Inkreises mit dem Kreis mit Mittelpunkt B durch X. Der Eckpunkt C ergibt sich schließlich als Schnittpunkt der Geraden AY und BZ.

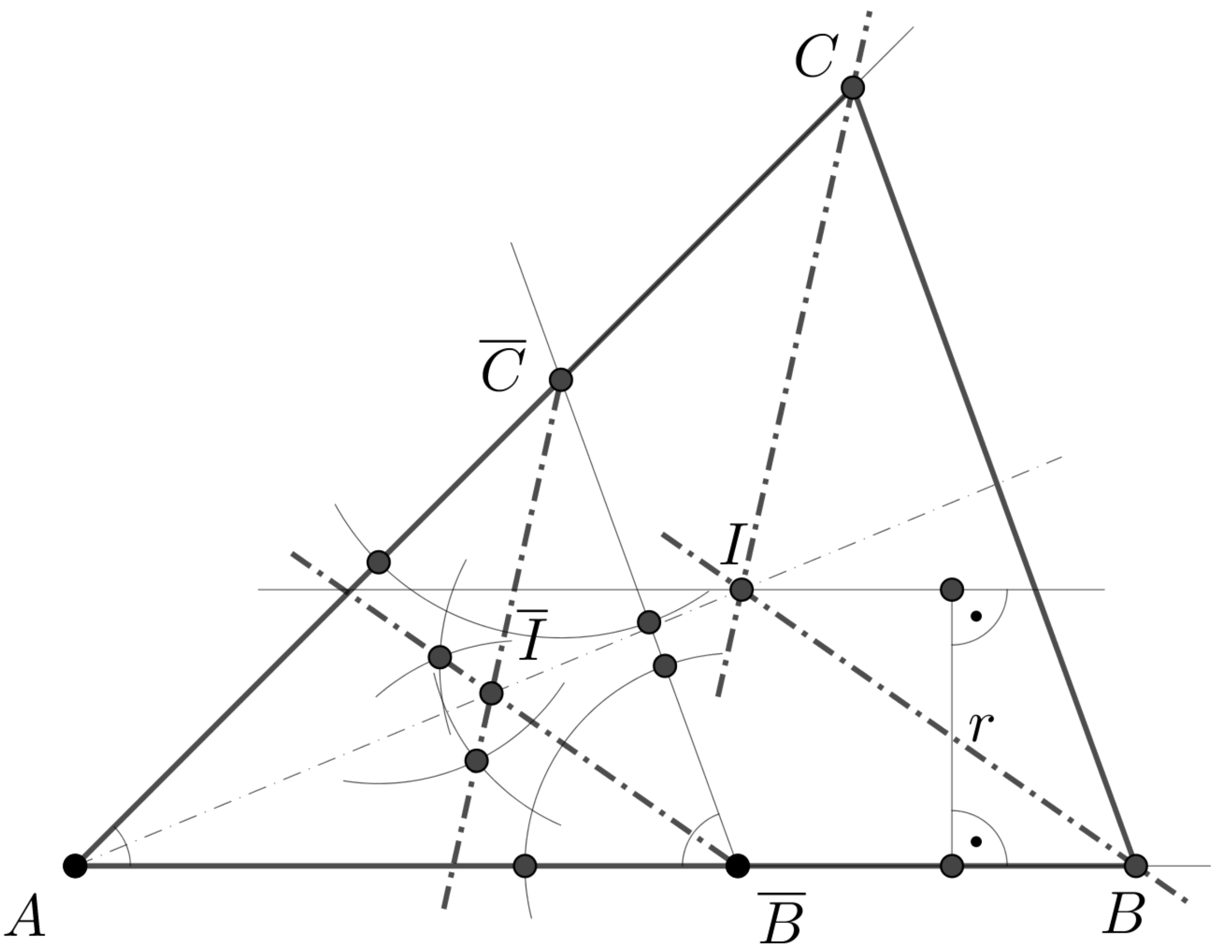


□

Inkreisradius und zwei Winkel

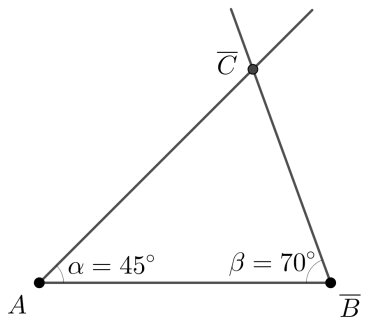
Aufgabe 2. *Konstruiere ein Dreieck mit* $r = 2{,}5\,\mathrm{cm}$*,* $\alpha = 45^\circ$ *und* $\beta = 70^\circ$*.*





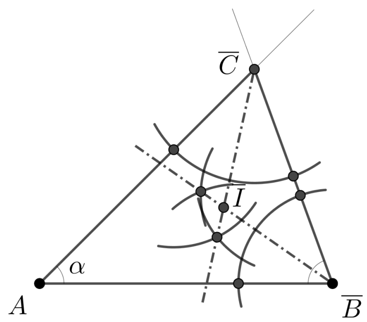
Lösung.
Da zwei Winkel von $\triangle ABC$ gegeben sind, kann zunächst ein beliebiges Dreieck mit den Innenwinkeln $\alpha = 45°$, $\beta = 70°$ und $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 65°$ konstruiert werden. Dieses kann dann derart einer zentrischen Streckung unterworfen werden, dass der Inkreisradius des resultierenden ähnlichen Dreiecks mit dem gegebenen Wert von r übereinstimmt.

Zu diesem Zweck zeichnen wir eine beliebige Strecke $A\overline{B}$ und zeichnen in A den Winkel α und in $\overline{B}$ den Winkel β. Dies ergibt ein Dreieck $A\overline{BC}$ mit den gegebenen Innenwinkeln.



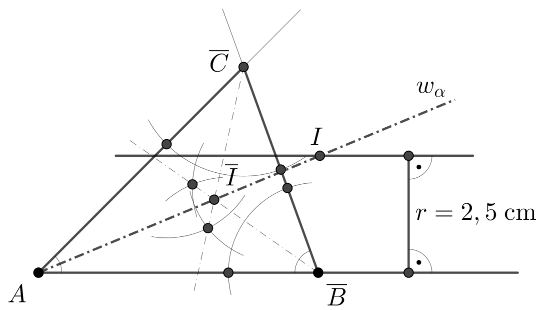
Nun wollen wir dieses Dreieck einer zentrischen Streckung aus A unterwerfen, welche den Inkreismittelpunkt $\overline{I}$ von $A\overline{BC}$ auf den Inkreismittelpunkt I des gesuchten Dreiecks ABC abbildet. Um dies zu erreichen, müssen wir nun die beiden Punkte $\overline{I}$ und I bestimmen.

Zuerst konstruieren wir $\overline{I}$ als Schnittpunkt der Winkelsymmetralen in $\overline{C}$ und $\overline{B}$.

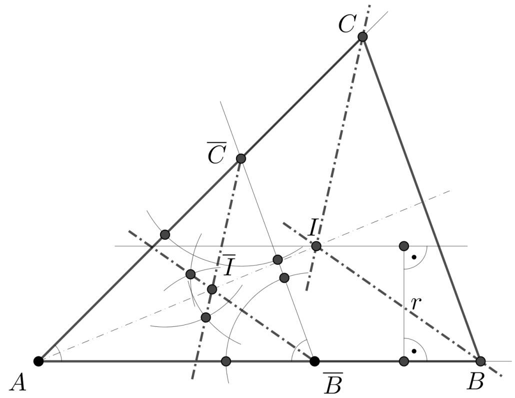


Wie in Aufgabe 2, wissen wir, dass I sowohl auf den Parallelen zu den beiden Schenkeln dieses Winkels im Abstand r als auch auf der Winkelsymmetrale w_α von α liegt.

Die Winkelsymmetrale w_α kennen wir als Gerade $A\overline{I}$ schon, und es genügt somit, ebenso wie bei der Lösung zu Aufgabe 2, die Parallele zu $A\overline{B}$ im Abstand r zu konstruieren. Den Punkt I erhalten wir als Schnittpunkt dieser Parallelen mit w_α.

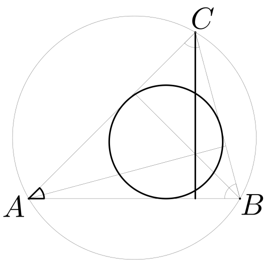


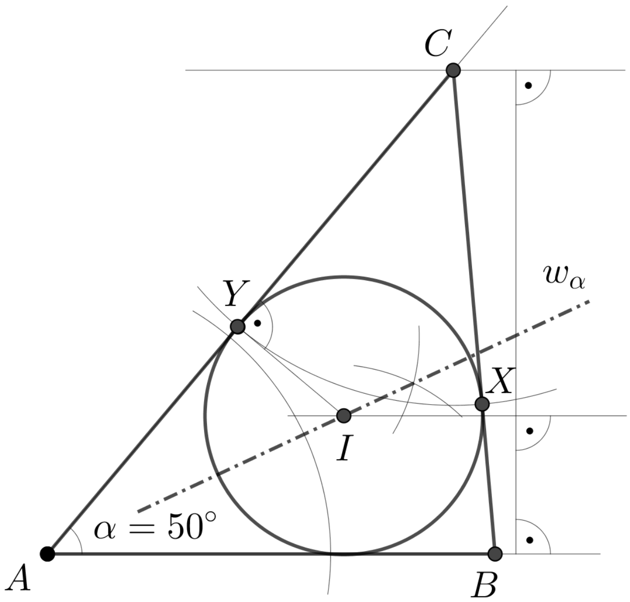
Nun wissen wir, dass die zentrische Streckung $\overline{B}$ auf B abbildet, und dass IB daher parallel zu $\overline{IB}$ liegt, während A, $\overline{B}$ und B kollinear liegen. Analoges gilt für C auf der Geraden $A\overline{C}$, und wir erhalten somit die beiden fehlenden Eckpunkte B und C des gesuchten Dreiecks durch Parallelverschiebung von $\overline{IB}$ bzw. $\overline{IC}$ durch I.



□

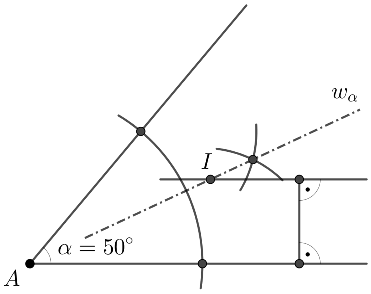
Aufgabe 3. *Konstruiere ein Dreieck mit* $r = 2\,\text{cm}$, $\alpha = 50°$ *und* $h_c = 7\,\text{cm}$.



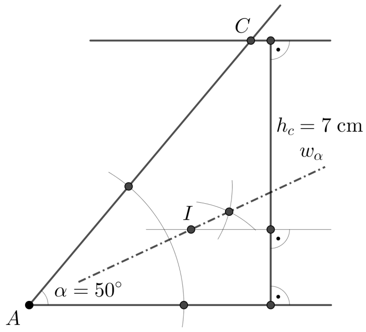


Lösung.

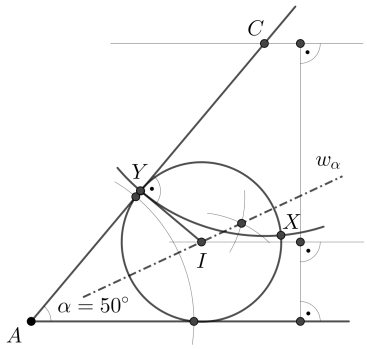
Wie in Aufgabe 2 beginnen wir mit der Konstruktion des Winkels α in einem Punkt A und der Konstruktion eines Kreises mit dem Radius r, der die beiden Schenkel dieses Winkels berührt. Die Konstruktion verläuft genau so wie in Aufgabe 2.



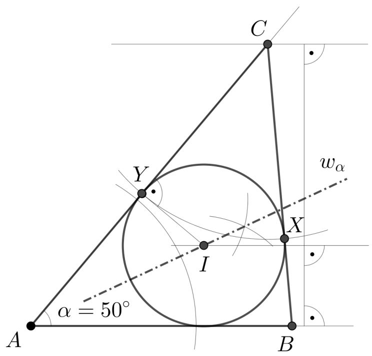
Wir nehmen nun an, dass der Eckpunkt B des gesuchten Dreiecks auf dem waagrechten Schenkel des Winkels α liegt, und der Eckpunkt C auf dem schräg liegenden Schenkel. Da die Höhe $h_c = 7\,\text{cm}$ gegeben ist, liegt C auch auf der Parallelen zum waagrechten Schenkel in diesem Abstand h_c. Konstruieren wir also nunmehr auch die Gerade parallel zu AB im Abstand h_c, ist der Eckpunkt C als Schnittpunkt dieser Parallele mit dem schräg liegenden Schenkel von α bestimmt.



Wir wissen, dass die Tangentialstrecken von C an den Inkreis gleich lang sind. Konstruieren wir also den Berührpunkt Y des Inkreises mit AC als Lotfußpunkt von I auf AC, ergibt sich der Berührpunkt X des Inkreises mit BC als Schnittpunkt des Inkreises mit dem Kreis mit Mittelpunkt C durch Y.



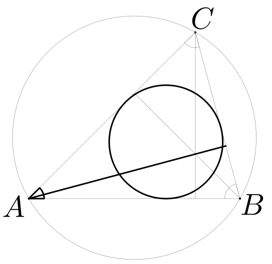
Der fehlende Eckpunkt B ergibt sich schließlich als Schnittpunkt von CX mit dem waagrechten Schenkel von α.

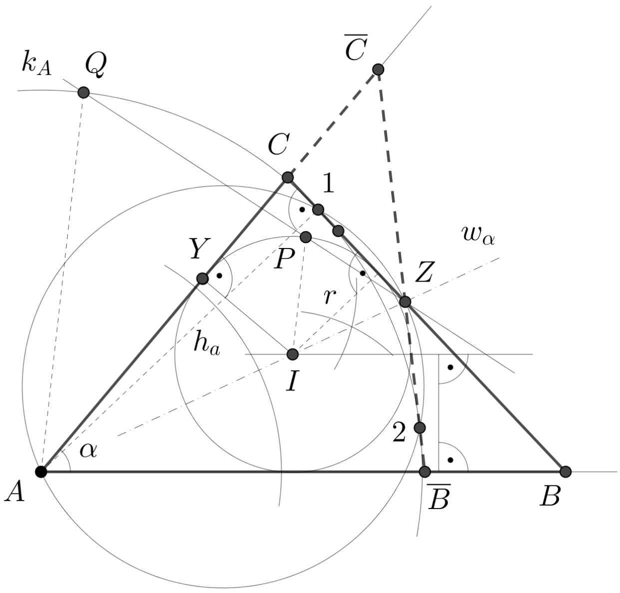


□

Inkreisradius, Winkel und Höhe

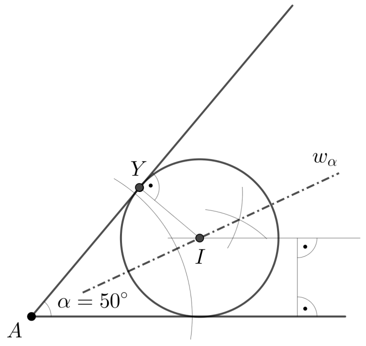
Aufgabe 4. *Konstruiere ein Dreieck mit $r = 2{,}5\,\text{cm}$, $\alpha = 50^\circ$ und $h_a = 6{,}5\,\text{cm}$.*



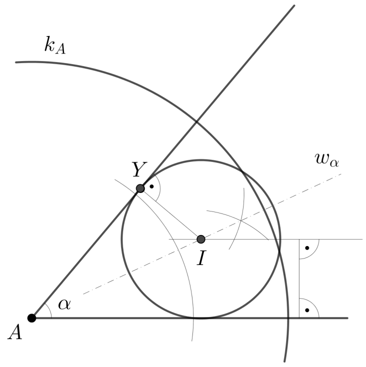


Lösung.

Wie in Aufgabe 3 konstruieren wir zuerst den Inkreismittelpunkt I auf der Winkelsymmetralen w_α und der Parallelen zu AB im Abstand r, sowie den Inkreis selbst, mit Hilfe seines Berührpunktes Y mit AC, den wir als Lotfußpunkt von I auf AC erhalten.

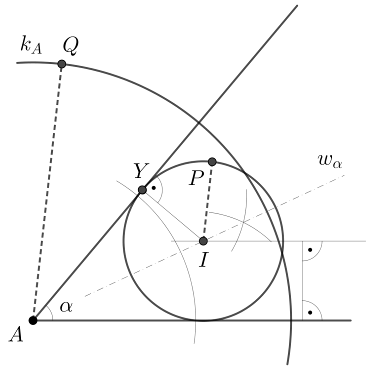


Im Unterschied zu Aufgabe 3 ist aber hier die Höhe h_a gegeben. Diese Höhe gibt uns den Normalabstand von A zur Seite $a = BC$ des Dreiecks ABC an. Die Seite a ist somit eine Tangente des Kreises k_A mit Mittelpunkt A und Radius h_a.

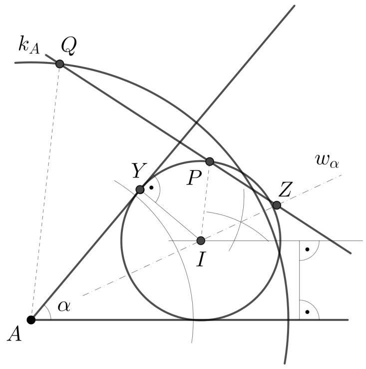


Die Seite a des Dreiecks ABC ist also eine gemeinsame Tangente von k_A mit dem Inkreis von ABC. Um die gemeinsamen Tangenten zweier Kreise zu konstruieren, kann man die Tatsache ausnutzen, dass es zu zwei Kreisen mit verschiedenen Radien immer einen Punkt gibt, von dem aus man eine zentrische Streckung ausführen kann, die einen Kreis in den anderen überführt. Gemeinsame Tangenten der beiden Kreise gehen dann sicher durch dieses Ähnlichkeitszentrum.

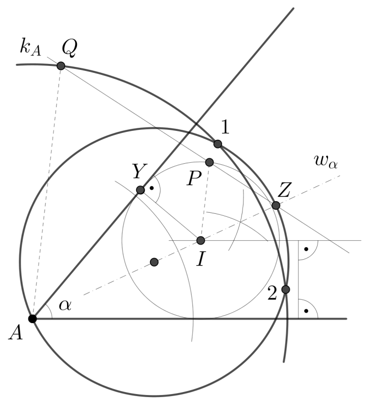
Um das Ähnlichkeitszentrum für den Inkreis von $\triangle ABC$ und k_A zu bestimmen, konstruieren wir zuerst beliebige parallele Radien IP und AQ dieser beiden Kreise.



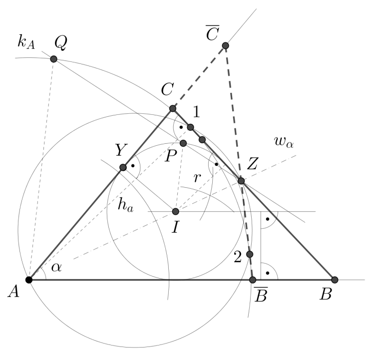
Da die gesuchte zentrische Streckung einerseits den Mittelpunkt I des Inkreises auf den Mittelpunkt A von k_A abbildet, aber wegen der Erhaltung der Parallelität andererseits auch P auf Q abbildet, ist das Zentrum Z dieser zentrischen Streckung der Schnittpunkt der beiden Geraden AI und PQ.



Die Seite a des Dreiecks kann nun als eine Tangente an einen der beiden Kreise durch Z bestimmt werden. Wir konstruieren also im nächsten Schritt die Tangenten an k_A durch Z. Zu diesem Zweck nutzen wir die Tatsache aus, dass eine Kreistangente im Berührpunkt normal zum Kreisradius steht. Der Berührpunkt einer Tangente an k_A durch Z muss daher auf dem Thaleskreis über die Strecke AZ liegen. Schneiden wir also diesen Thaleskreis mit k_A, erhalten wir die beiden möglichen Berührpunkte 1 und 2 von a mit k_A.

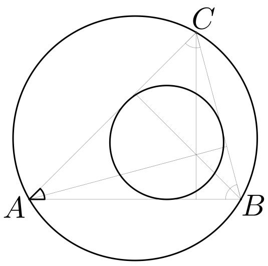


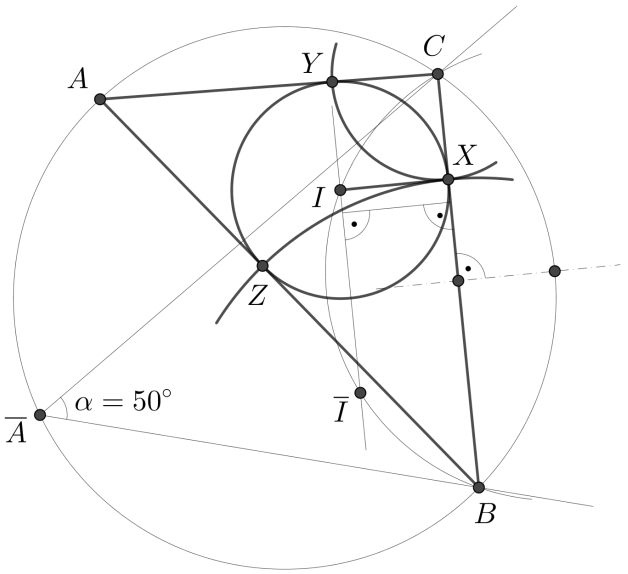
Wir erhalten also die beiden möglichen Lagen von $a = BC$ auf den Geraden $Z1$ und $Z2$.



□

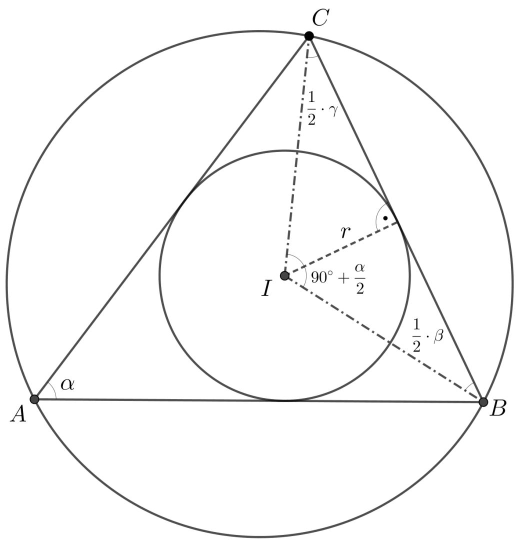
Aufgabe 5. *Konstruiere ein Dreieck mit $r = 2\,\text{cm}$, $\alpha = 50°$ und $R = 5\,\text{cm}$.*





Lösung.

Ehe wir uns an die Konstruktion der Lösung dieser Aufgabe heranwagen, betrachten wir zuerst folgende Figur.



Hier ist ein Dreieck ABC mit zugehörigem Inkreis und Umkreis dargestellt. Aufgrund des Peripheriewinkelsatzes wissen wir, dass die Länge der Seite BC des Dreiecks durch die Vorgabe des Umkreisradius R und des (spitzen) Innenwinkels α feststeht. Ferner wissen wir einiges über die Lage des Inkreismittelpunkts I relativ zu dieser Strecke BC. Zum einen ist der Normalabstand von I zu AB gleich dem Inkreisradius r. Zum anderen ist I der Schnittpunkt der Winkelsymmetralen von $\triangle ABC$ in B und C. Da diese mit B und C Winkel von $\frac{1}{2} \cdot \beta$ bzw. $\frac{1}{2} \cdot \gamma$ einschließen, kennen wir auch die Größe von $\angle BIC$ in Abhängigkeit von α, denn es gilt im Dreieck BIC

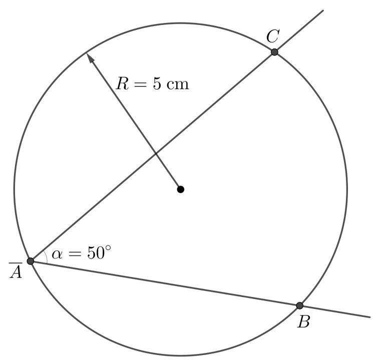
$$\angle BIC = 180^\circ - \angle CBI - \angle ICB = 180^\circ - \frac{1}{2} \cdot \beta - \frac{1}{2} \cdot \gamma = 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot \alpha.$$

Aufgrund des Peripheriewinkelsatzes liegt der Punkt I somit auf einem bestimmten Kreisbogen BC, auf dem alle Punkte mit dieser Eigenschaft liegen.

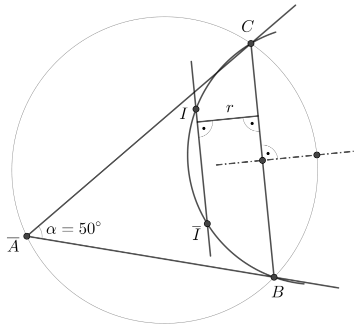
Wir wissen aber schon mehr über die Lage dieses Punkts. Nach dem erweiterten Südpolsatz ist der Umkreismittelpunkt von $\triangle BIC$ nämlich der Schnittpunkt der Streckensymmetrale von BC mit dem Bogen BC. Diese Tatsache wird bei der konstruktiven Ausführung sehr hilfreich sein.

Nach diesen Beobachtungen können wir nunmehr die Konstruktion von $\triangle ABC$ aus den gegebenen Bestimmungsstücken angehen.

Wir zeichnen zuerst einen Kreis mit Radius $R = 5\,\text{cm}$ und wählen auf dem Kreis einen beliebigen Punkt $\overline{A}$ als Scheitel eines Winkels $\alpha = 50^\circ$. Die Schenkel dieses Winkels schneiden den Kreis in Punkten B bzw. C.

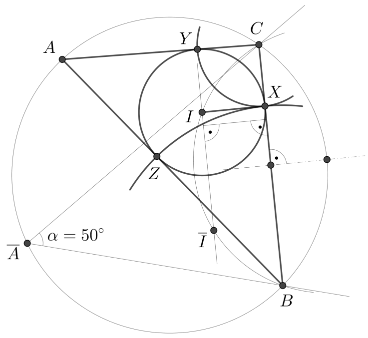


Schneiden wir die Streckensymmetrale von BC mit dem Kreis, so erhalten wir den Mittelpunkt eines Kreises durch B und C. Der Inkreismittelpunkt liegt, wie wir wissen, auf dem kleinen Bogen BC dieses Kreises. Weiters liegt I auch auf der Parallelen zu BC im Abstand $r = 2\,\text{cm}$, die wir auf die bereits aus den früheren Aufgaben bekannte Art konstruieren. Der Inkreismittelpunkt ist dann einer der beiden Schnittpunkte dieser Parallelen mit dem Kreisbogen.



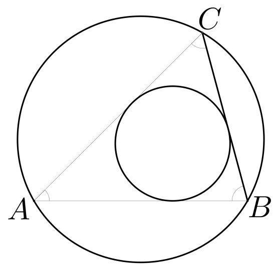
Da die beiden Lösungen der Aufgabe bezüglich der Streckensymmetrale von BC symmetrisch liegen, ist hier nur die Lösung mit Inkreismittelpunkt I fertig ausgeführt.

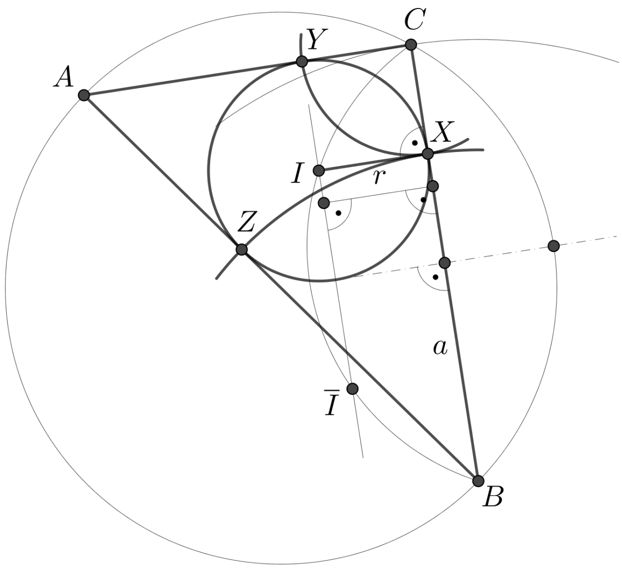
Wir konstruieren den Lotfußpunkt X von I auf BC, womit auch der Inkreis mit Mittelpunkt I und Radius IX bestimmt ist. Wie wir schon bei anderen Aufgaben festgestellt haben, sind die Tangentialstrecken von Punkten außerhalb eines Kreises jeweils gleich lang. Der Berührpunkt Z von AB mit dem Inkreis liegt somit auf dem Kreis mit Mittelpunkt in B durch X und der Berührpunkt Y von AC mit dem Inkreis liegt auf dem Kreis mit Mittelpunkt in C durch X. Der noch fehlende Eckpunkt A ergibt sich somit (auf dem Umkreis) als Schnittpunkt von BZ und CY.



□

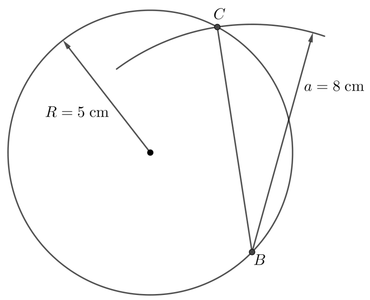
Aufgabe 6. *Konstruiere ein Dreieck mit* $r = 2\,\text{cm}$, $a = 8\,\text{cm}$ *und* $R = 5\,\text{cm}$.



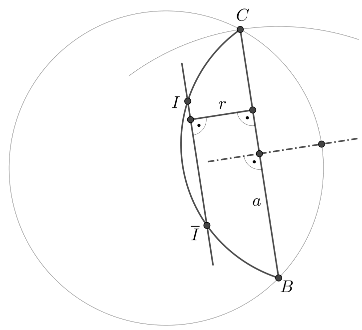


Lösung.
Wie wir aufgrund des Peripheriewinkelsatzes wissen, ist die Vorgabe von Umkreisradius und Seitenlänge gleichwertig mit der Vorgabe von Umkreisradius und Innenwinkel, da die Sehne im Kreis den Winkel bestimmt und umgekehrt. Die Lösung dieser Aufgabe ist also fast identisch der von Aufgabe 5.

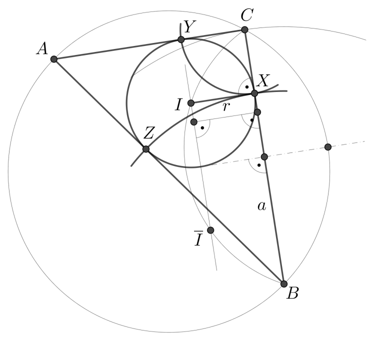
Wir zeichnen zuerst einen Kreis mit Radius $R = 5\,\text{cm}$ und markieren einen beliebigen Punkt B auf diesem Kreis. Den Eckpunkt C bestimmen wir auf dem Ausgangskreis indem wir von B den Abstand $a = 8\,\text{cm}$ abschlagen. Die Seite BC des Dreiecks ABC ist somit festgelegt.



Wie in Aufgabe 5 wissen wir nun, dass der Inkreismittelpunkt einerseits auf dem Kreis durch B und C mit Mittelpunkt im Schnittpunkt der Streckensymmetrale von BC mit dem kleinen Bogen des Umkreises liegt, und andererseits auf der Parallelen zu BC im Abstand $r = 2\,\text{cm}$. Die Konstruktion dieser beiden Objekte wird gleich wie in der Lösung von Aufgabe 5 durchgeführt.



Auch der Abschluss wird genau so wie in der Lösung von Aufgabe 5 mit Hilfe der Punkte X, Y und Z ausgeführt.



□