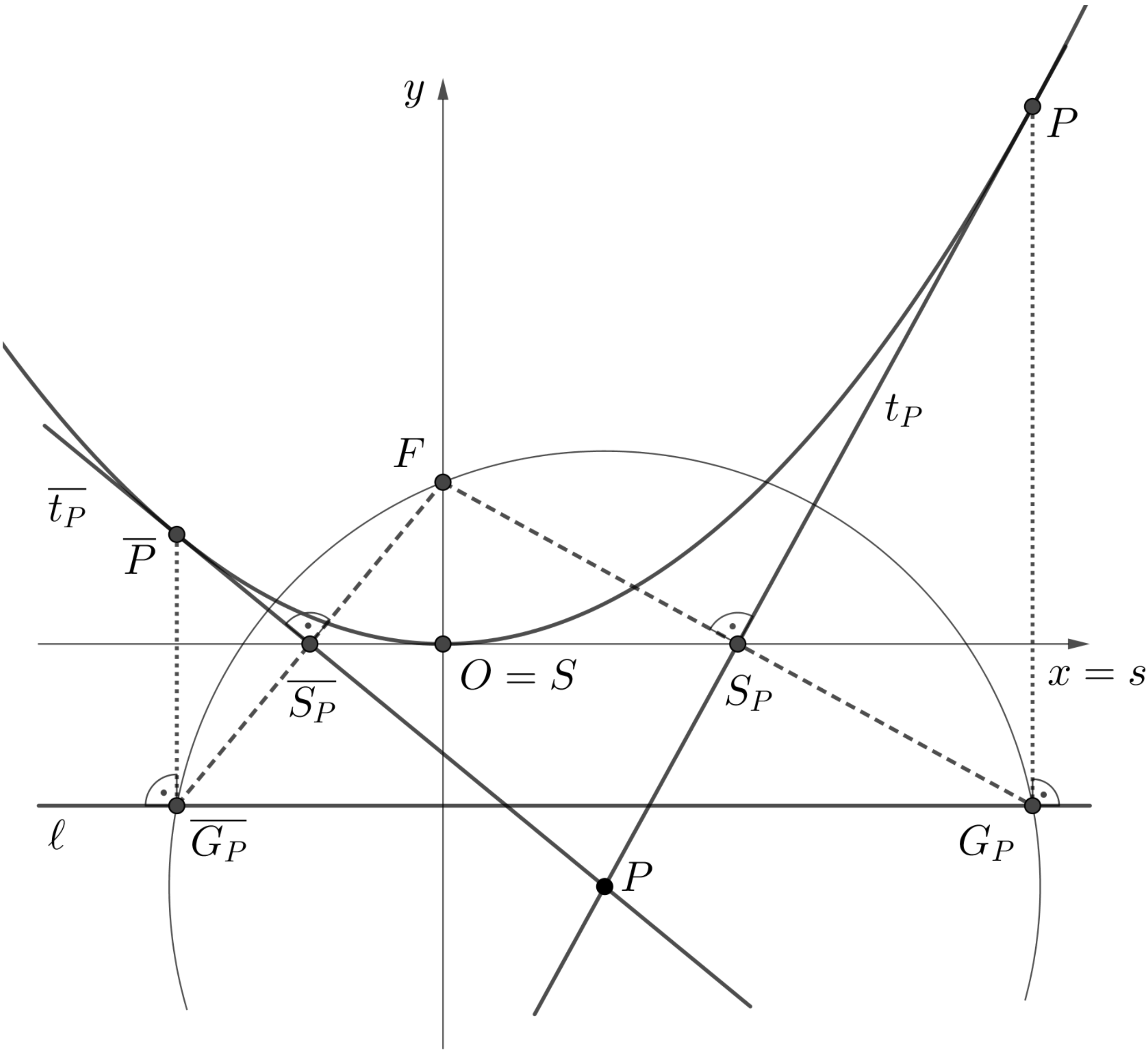
Auf diesem Konstruktionsblatt betrachten wir exemplarisch zwei Konstruktionen, mit deren Hilfe man Tangenten einer gegebenen Parabel unter Verwendung von Gegenpunkten auf der Leitlinie bestimmen kann. Die Konstruktionen, die hier für spezielle Maße ausgeführt werden, sind für beliebige Maße gültig.

Brennpunkt, Leitlinie ℓ und Punkt P

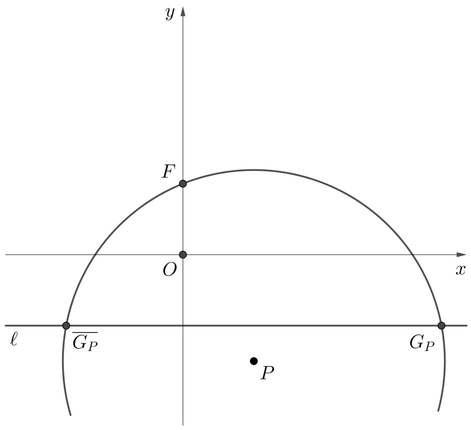
Aufgabe 1. Gegeben sei die Parabel mit dem Brennpunkt $F(0/2)$ und der Leitlinie $\ell : y = -2$. Konstruiere die Tangenten der Parabel, die durch den Punkt $P(2/-3)$ gehen.



Lösung.

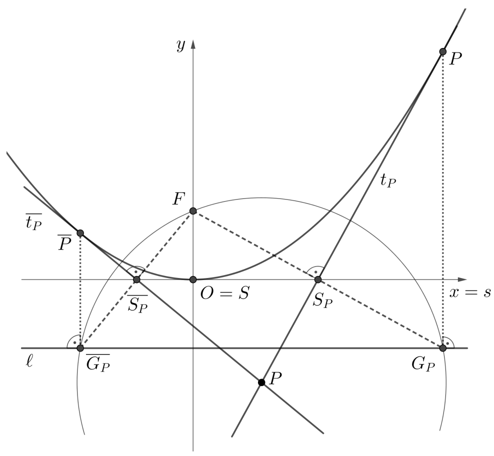
1) Wie auf dem Grundlagenblatt – Parabeltangenten besprochen, liegt der symmetrische Punkt zum Brennpunkt F bezüglich jeder beliebigen Ellipsentangente t_P (der Gegenpunkt G_P) auf der Leitlinie ℓ der Parabel.

2) Da die Tangente dann aufgrund der Spiegelung die Streckensymmetrale von G_PF sein muss, sind die Abstände von jedem Punkt P auf der Tangente zu G_P und F sicher gleich groß. Der Gegenpunkt einer Parabeltangente durch P muss also einer der beiden Schnittpunkte der Leitlinie mit dem Kreis mit Mittelpunkt P durch F sein. Wir erhalten zwei mögliche Gegenpunkte für Parabeltangenten durch P, nämlich G_P und $\overline{G_P}$.



3) Die Tangente t_P, die durch den Gegenpunkt G_P bestimmt wird ist dann die Streckensymmetrale von G_PF, und somit normal zu dieser Strecke. Der Berührpunkt P von t_P mit der Ellipse liegt, wie schon auf dem Grundlagenblatt – Parabeltangenten besprochen, auf der Normalen zu ℓ durch G_P. Wir erhalten P daher als Schnittpunkt dieser Normalen mit t.

4) Analog gilt dies auch alles für den anderen Gegenpunkt $\overline{G_P}$, und wir erhalten von diesem ausgehend die andere Lösung $\overline{t_P}$ mit dem Berührpunkt $\overline{P}$.

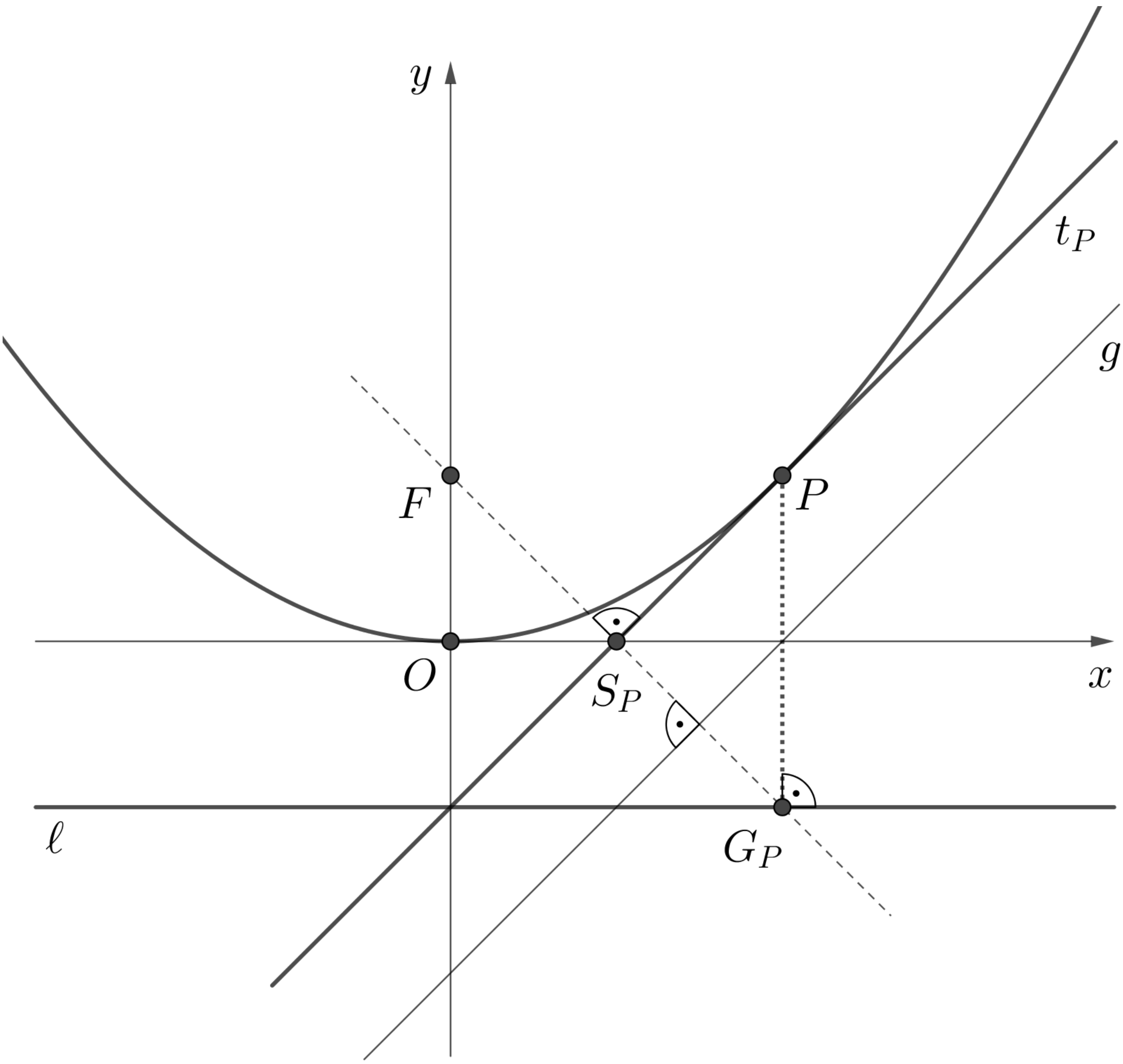


Die Konstruktion ist somit abgeschlossen. □

Es ist noch bemerkenswert festzustellen, dass die Scheiteltangente s der Parabel in dieser Konstruktion auch verwendet werden kann. Die Scheiteltangente ist die Tangente der Parabel im Scheitel S, also im Schnittpunkt der Parabelachse mit der Kurve. Diese Tangente s ist aus Symmetriegründen sicher normal zur Achse, und somit parallel zur Leitlinie ℓ, die ja ebenfalls normal zur Achse ist. In der obigen Figur liegt diese Gerade aufgrund der gegebenen Koordinaten in der x-Achse. Da die Abstände von S zu F und zu ℓ gleich groß sind, und G_P auf ℓ liegt, liegt der Mittelpunkt S_P von FG_P aufgrund des Strahlensatzes auf dieser Scheiteltangente s. Die Streckensymmetrale von FG_P ist also die Gerade normal zu FG_P durch diesen Punkt S_P auf s.

Tangente ist parallel zu gegebener Gerade g

Aufgabe 2. Gegeben sei die Parabel mit dem Brennpunkt $F(0/2)$ und der Leitlinie $\ell : y = -2$. Konstruiere die Tangenten der Parabel, die parallel zur Gerade $g : y = x - 4$ liegen.

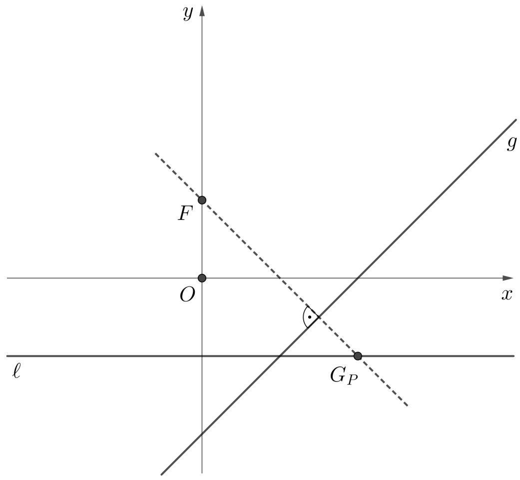


Lösung.

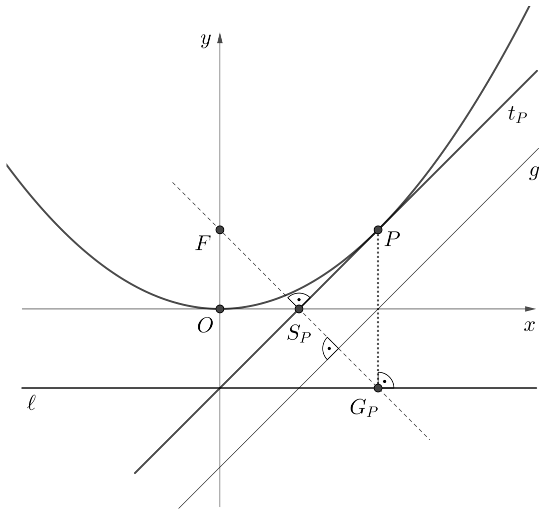
1) Wie in Aufgabe 1 wissen wir, dass die Gegenpunkte der gesuchten Tangenten auf der Leitlinie ℓ liegen.

2) Da jede derartige Tangente t_P normal zu G_PF liegen muss, und die gegebene Gerade g parallel zu t_P liegen soll, muss G_PF auch normal zu g liegen. Der Gegenpunkt einer Parabeltangente parallel zu g muss also der Schnittpunkt der Leitlinie mit der Normalen zu g durch F sein.

3) Hier ist der Schnitt der Leitlinie mit dieser Normalen dargestellt. Wir erhalten den eindeutigen Gegenpunkt G_P für eine Parabeltangente parallel zu g.



4) Wie in Aufgabe 1 ist nun die Tangente t_P, die durch den Gegenpunkt G_P bestimmt wird, die Streckensymmetrale von G_PF, und somit normal zu dieser Strecke. (Wie schon in Aufgabe 1 erwähnt, können wir die Tangente auch als Normale zu G_PF durch den Schnittpunkt S_P dieser Strecke mit der Scheiteiltangente s erhalten). Der Berührpunkt P von t_P mit der Parabel liegt wieder auf der Normalen zu ℓ durch G_P. Wir erhalten P daher wieder als Schnittpunkt dieser Normalen mit t_P.



Die Konstruktion ist somit abgeschlossen. □