Lösungsfälle

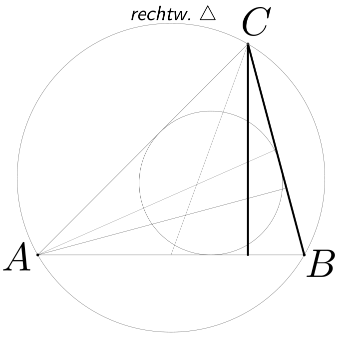
In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Konstruktion von rechtwinkeligen Dreiecken. Da in jedem Fall die Vorgabe eines Winkels als Information gegeben ist, genügt es zur Konstruktion, zwei weitere Bestimmungsstücke anzugeben. Wir müssen allerdings bei der Suche nach einer Konstruktion berücksichtigen, dass wir zunächst nicht wissen, welche Lage dieser rechte Winkel relativ zu den restlichen gegebenen Bestimmungsstücken einnimmt. Dies führt dazu, dass jeweils mehrere Fälle zu unterscheiden sind, die zu durchaus andersartigen Lösungen führen können.

Bei den Konstruktionen wird es immer wieder nützlich sein zu berücksichtigen, dass der Umkreismittelpunkt aufgrund des Satzes von Thales im Mittelpunkt der Dreieckshypotenuse liegt, und dass der Umkreisradius R gleich der halben Länge dieser Hypotenuse ist.

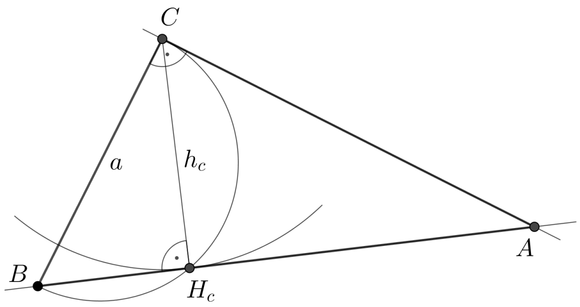
Eine Seite und anliegende Höhe

Aufgabe 1. *Konstruiere rechtwinkelige Dreiecke mit* $a = 6\,\text{cm}$ *und* $h_c = 5\,\text{cm}$.

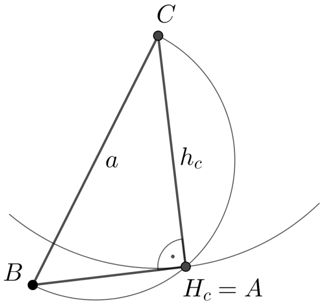
Einer der drei theoretisch möglichen Fälle führt zu keiner Lösung.



- $\gamma = 90°$:

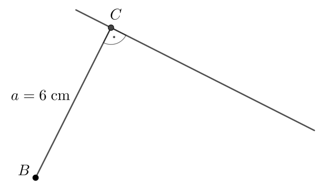


- $\beta = 90°$: Dieser Fall kann nicht eintreten.
- $\alpha = 90°$:

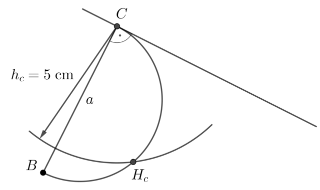


Lösung.
Zunächst stellen wir fest, dass der Eckpunkt C des Dreiecks ABC jedenfalls der gemeinsame Endpunkt der beiden Strecken a und h_c ist. Wir haben aber jetzt drei mögliche Fälle zu unterscheiden, da der rechte Winkel in diesem gemeinsamen Endpunkt C liegen kann, im anderen Endpunkt B von a, oder im gegenüberliegenden Eckpunkt A. Wir betrachten also Konstruktionen von Dreiecken der gesuchten Art in dieser Reihenfolge.

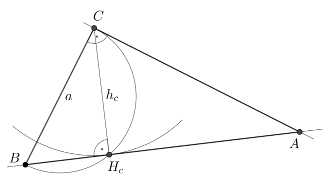
Als Erstes nehmen wir an, dass der rechte Winkel von ABC in C liege. Wir konstruieren also eine Strecke a der gegebenen Länge $a = 6\,\text{cm}$ und einen rechten Winkel in C. Der Eckpunkt A des Dreiecks wird dann auf der Normalen zu a durch C zu liegen kommen.



Nun wissen wir, dass der Höhenfußpunkt H_c von C auf c den Abstand $h_c = 5\,\text{cm}$ von C hat, und dass $\angle BH_cC = 90°$ gilt. Der Punkt H_c ist also derjenige Punkt auf dem Thaleskreis über die Strecke BC, der auch auf dem Kreis mit Mittelpunkt C und Radius h_c liegt.

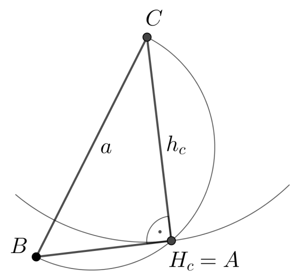


Da der Punkt H_c auf der Seite c liegt, kennen wir nun die Trägergerade BH_c von c, und den Eckpunkt A als Schnittpunkt dieser Geraden mit der bereits konstruierten Normalen zu BC durch C, womit die Konstruktion abgeschlossen ist.



Als nächstes wenden wir uns dem Fall zu, in dem sich der rechte Winkel im Eckpunkt B befindet, und stellen gleich fest, dass dieser Fall zu keiner Lösung führt. In diesem Fall wäre nämlich die Seite a mit der Höhe h_c identisch. Da aber die beiden Strecken mit unterschiedlichen Längen gegeben sind, kann dieser Fall somit nicht eintreten.

Es bleibt also der Fall zu untersuchen, in dem sich der rechte Winkel im Eckpunkt A befindet. In diesem Fall fallen die beiden Punkte A und H_c zusammen, und wir sehen, dass die Konstruktion bereits als Teil der Konstruktion im ersten Fall enthalten ist. Konstruieren wir den Punkt H_c auf gleiche Weise wie zuvor als Schnittpunkt des Thaleskreises über die Strecke BC mit dem Kreis mit Mittelpunkt C und Radius h_c, kennen wir schon den Eckpunkt $A = H_c$, und die Konstruktion ist auch in diesem Fall abgeschlossen.

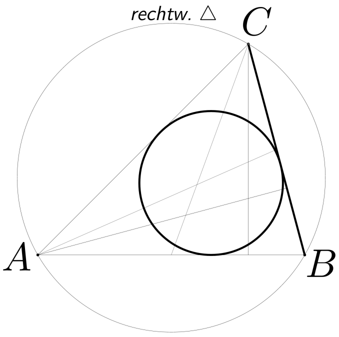


□

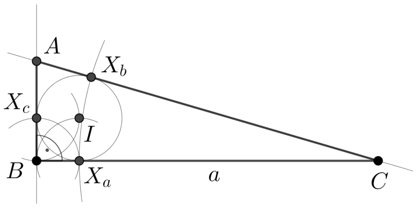
Eine Seite und Inkreisradius

Aufgabe 2. *Konstruiere rechtwinkelige Dreiecke mit* $a = 8\,\text{cm}$ *und* $\rho = 1\,\text{cm}$.

Beachte, dass der rechte Winkel in jedem der drei Eckpunkte liegen kann.

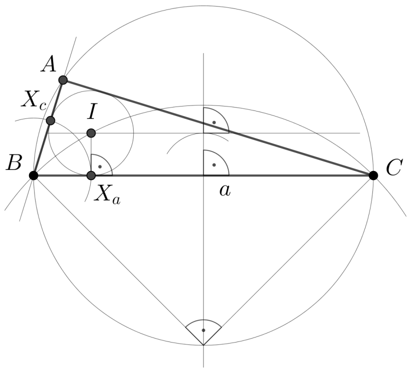


- $\beta = 90°$ (bzw. $\gamma = 90°$):



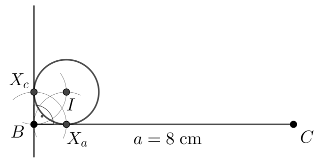
Der Fall $\gamma = 90°$ ist zu dieser Lösung symmetrisch.

- $\alpha = 90°$:



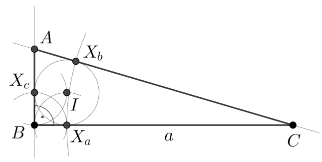
Lösung.
Wie in Aufgabe 1 kann sich der rechte Winkel zunächst in jedem der drei Eckpunkte befinden. Die Fälle $\beta = 90°$ und $\gamma = 90°$ sind allerdings vollkommen symmetrisch, und wir betrachten von diesen beiden nur den erstgenannten Fall $\beta = 90°$.

Wir konstruieren also eine Strecke a der gegebenen Länge $a = 8\,\mathrm{cm}$ und einen rechten Winkel in B. Der Inkreismittelpunkt I ist dann der B diagonal gegenüberliegende Eckpunkt im Quadrat mit der Seitenlänge $\rho = 1\,\mathrm{cm}$ und Seiten auf den Dreiecksseiten BA und BC.



Die Eckpunkte dieses Quadrats auf den Dreiecksseiten sind dann die Berührpunkte X_a und X_c des Inkreises mit den Seiten a bzw. c.

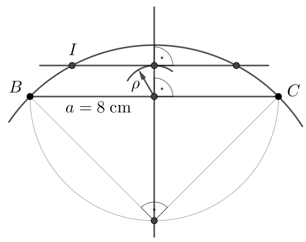
Da die Tangentialabstände von C an den Inkreis gleich lang sind, liegt der Berührpunkt X_b der Seite b mit dem Inkreis auf dem Kreis mit Mittelpunkt C durch X_a, und da der Eckpunkt A sowohl auf der Geraden CX_b als auch auf der Normalen zu BC durch B liegt, ist die Konstruktion mit der Bestimmung dieses Punktes schon fertig.



Nun wenden wir uns dem Fall zu, in dem sich der rechte Winkel im Eckpunkt A befindet.

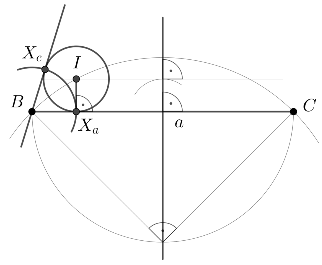
Da in diesem Fall $\angle IBC = \frac{1}{2}\beta$, $\angle ICB = \frac{1}{2}\gamma$ und $\beta + \gamma = 180° - \alpha = 90°$ gilt, woraus $\angle BIC = 180° - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma = 135°$ folgt, liegt der Inkreismittelpunkt I aufgrund des Peripheriewinkelsatzes auf dem Kreisbogen durch die Punkte B und C, von deren Punkte aus die Strecke BC unter dem Winkel $135°$ erscheint. Dieser Bogen liegt auf dem Kreis mit Zentriwinkel $2 \cdot (180° - 135°) = 90°$.

Wir bestimmen also den Mittelpunkt dieses Kreises indem wir das gleichschenkelig rechtwinkelige Dreieck mit Hypotenuse BC konstruieren. Da ferner der Normalabstand von I zu BC mit ρ gegeben ist, erhalten wir I als Schnittpunkt dieses Kreises mit der Parallelen zu BC im Abstand $\rho = 1\,\mathrm{cm}$.

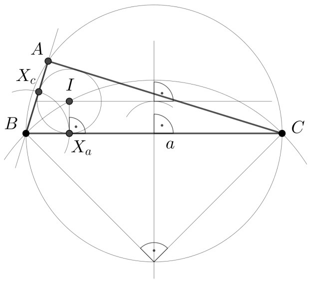


Dies ergibt zwei mögliche Lagen von I, die allerdings bezüglich der Streckensymmetrale von BC symmetrisch liegen. Es genügt im Moment also, einen mögliche Lage von I weiter zu behandeln, und wir setzen nun mit dem linken der beiden möglichen Punkten fort.

Der Lotfußpunkt von I auf BC ist der Berührpunkt X_a des Inkreises mit der Seite a. Mit diesem Punkt kennen wir also den Inkreis des Dreiecks. Da die Tangentialstrecken von B an den Inkreis gleich lang sind, gilt $BX_a = BX_c$, und wir erhalten den Punkt X_c als Schnittpunkt des Inkreises mit dem Kreis mit Mittelpunkt B durch X_a.



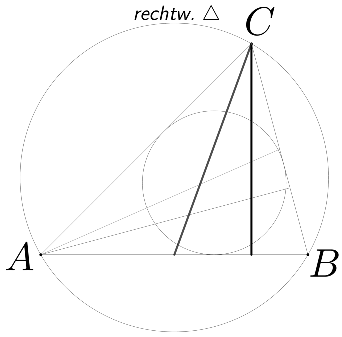
Da wir nun die Trägergerade BX_c der Seite $c = AB$ kennen, können wir nun den fehlenden Eckpunkt wahlweise als Lotfußpunkt von C auf BX_c bestimmen, oder als Schnittpunkt von BX_c mit dem Thaleskreis über die Strecke BC, oder mit Hilfe des Berührpunktes X_b von $b = CA$ mit dem Inkreis, den wir mit Hilfe der Eigenschaft $CX_a = CX_b$ bestimmen können. In der Zeichnung sehen wir die Vervollständigung, die mit Hilfe des Thaleskreises durchgeführt wurde.



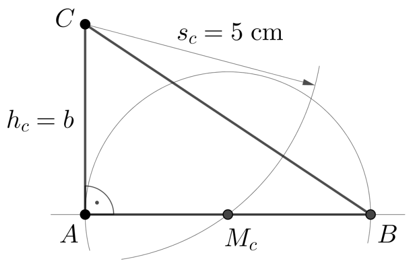
□

Aufgabe 3. *Konstruiere rechtwinkelige Dreiecke mit* $h_c = 4\,\text{cm}$ *und* $s_c = 5\,\text{cm}$.

Beachte, dass der rechte Winkel in jedem der drei Eckpunkte liegen kann.

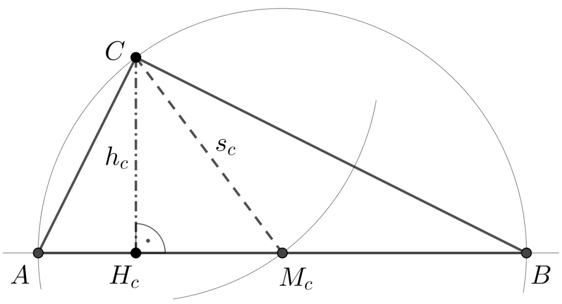


- $\alpha = 90°$ (bzw. $\beta = 90°$):



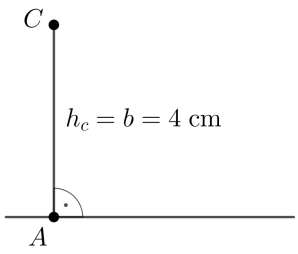
Der Fall $\beta = 90°$ ist zu dieser Lösung symmetrisch.

- $\gamma = 90°$:

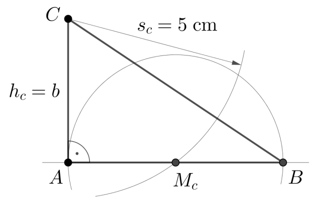


Lösung.
Nehmen wir an, dass der rechte Winkel entweder im Eckpunkt A oder im Eckpunkt B liegt, so fällt die Höhe h_c mit einer Seite zusammen.

In der Zeichnung sei also der rechte Winkel in A angenommen. Wir konstruieren die Höhe $h_c = b = 4$ cm, und die Gerade normal zu h_c durch A. Auf dieser Gerade liegt dann die Seite $c = AB$ des Dreiecks.

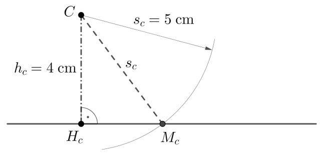


Der Mittelpunkt M_c der Seite c liegt auf dieser Gerade im Abstand $s_c = 5\,\text{cm}$ von C, also auf dem Kreis mit Mittelpunkt C und Radius s_c. Da wir den Eckpunkt B auf c symmetrisch zu A bezüglich M_c erhalten, ist die Konstruktion des Dreiecks in diesem Fall somit abgeschlossen.

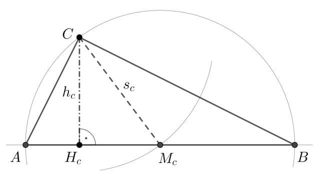


Nun sei der rechte Winkel in C angenommen.

In diesem Fall konstruieren wir ebenfalls zuerst eine Strecke CH_c der Länge h_c und eine Normale zu dieser Strecke durch den Punkt H_c auf der die Seite $AB = c$ des Dreiecks liegen wird. Ebenso können wir den Punkt M_c auf dieser Normalen bestimmen, als Schnittpunkt mit dem Kreis mit Radius s_c und Mittelpunkt C.



Da AB im Dreieck mit rechtem Winkel in C die Hypotenuse ist, ist der Mittelpunkt M_c von $c = AB$ der Mittelpunkt des Thaleskreises über die Seite AB. Die beiden Eckpunkte A und B liegen somit auf dem Kreis mit Mittelpunkt M_c durch C. Schneiden wir also diesen Kreis mit der Normalen zu h_c durch H_c, ist die Konstruktion vollständig.

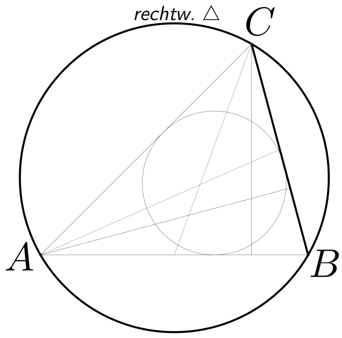


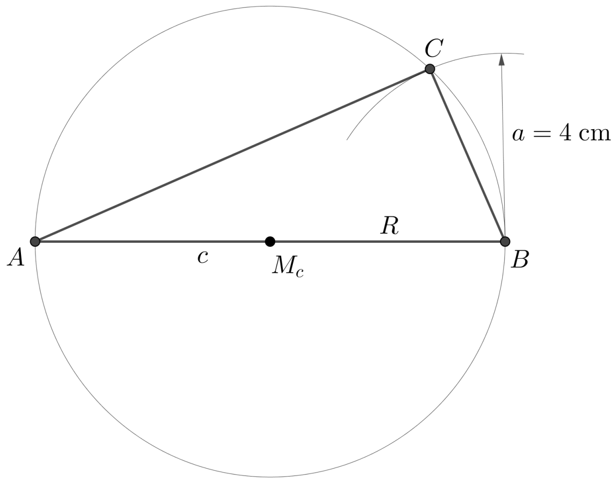
□

Eine Seite und Umkreisradius

Aufgabe 4. *Konstruiere rechtwinkelige Dreiecke mit* $R = 5\,\text{cm}$ *und* $a = 4\,\text{cm}$.

Überlege zunächst, ob a die Hypotenuse des Dreiecks sein kann.

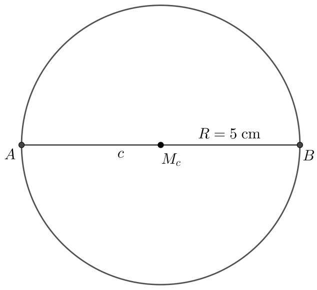




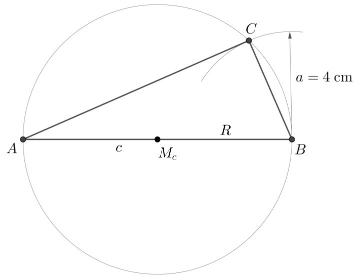
Der Fall $\beta = 90°$ ist zu dieser Lösung symmetrisch. Der Fall $\alpha = 90°$ kann nicht eintreten.

Lösung.
Da das Dreieck ABC rechtwinkelig ist, ist die Länge der Hypotenuse doppelt so groß wie der Umkreisradius. Da aber $2 \cdot 5 \neq 4$ gilt, ist a sicher nicht die Länge der Hypotenuse.

Wir beginnen also die Konstruktion mit der Bestimmung des Umkreises mit dem Radius $R = 5\,\text{cm}$. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist dann der Mittelpunkt M_c der Hypotenuse c, und wir können annehmen, dass die Endpunkte A und B eines beliebigen Durchmessers auch schon Eckpunkte des gesuchten Dreiecks sind.



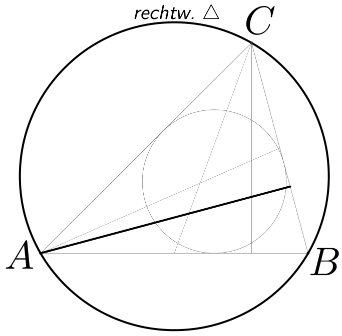
Da der Abstand des Eckpunktes C von B gleich der gegebenen Seitenlänge $a = 4\,\text{cm}$ ist, erhalten wir den Eckpunkt C als Schnittpunkt des Umkreises mit dem Kreis mit Mittelpunkt B und Radius a, womit die Konstruktion des Dreiecks abgeschlossen ist.

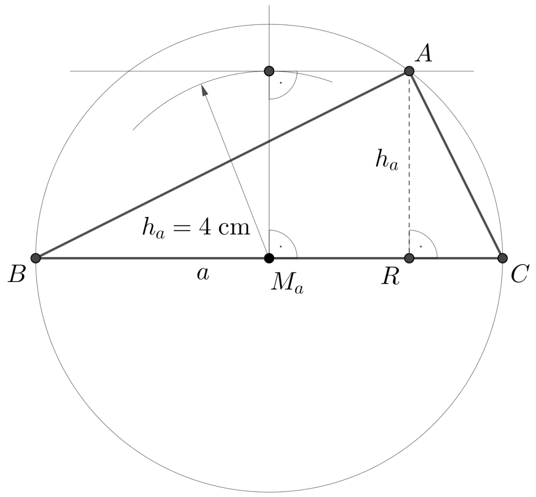


□

Eine Höhe und Umkreisradius

Aufgabe 5. *Konstruiere rechtwinkelige Dreiecke mit* $R = 5\,\text{cm}$ *und* $h_a = 4\,\text{cm}$.

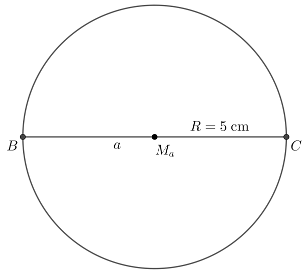




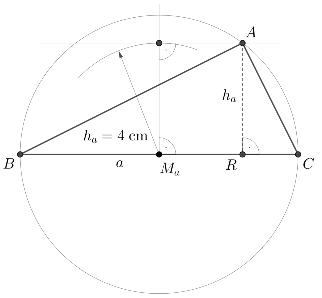
Der Fall dass h_a mit einer Kathete zusammenfällt, führt auf die Konstruktion von Aufgabe 4 zurück.

Lösung.
Wie in Aufgabe 4 wissen wir, dass $2R$ die Länge der Hypotenuse von ABC und der Durchmesser seines Umkreises ist. Zwei Höhen des rechtwinkeligen Dreiecks sind mit den Katheten identisch, und die Annahme, dass es sich bei h_a um eine dieser beiden Höhen handelt, führt die Angabe zurück auf die bereits behandelte Konstruktion von Aufgabe 4. Wir nehmen also im weiteren an, h_a sei die Höhe normal auf die Hypotenuse.

Wie in Aufgabe 4 zeichnen wir zuerst den Umkreis und einen seiner Durchmesser. Da wir annehmen, dass h_a die Höhe auf diese Hypotenuse ist, ist dies die Seite a des Dreiecks mit den Endpunkten B und C.



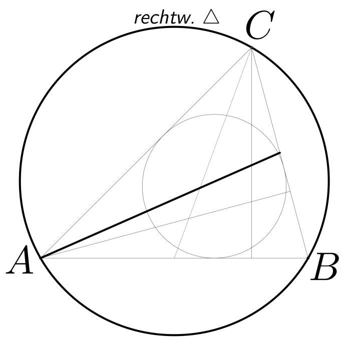
Da der Normalabstand von A zu a gleich h_a ist, liegt A auf der Parallelen zu $a = BC$ im Abstand $h_a = 4\,\text{cm}$. Schneiden wir diese Parallele mit dem Umkreis, erhalten wir die beiden möglichen (symmetrischen) Lagen von A, was die Konstruktion des Dreiecks abschließt.

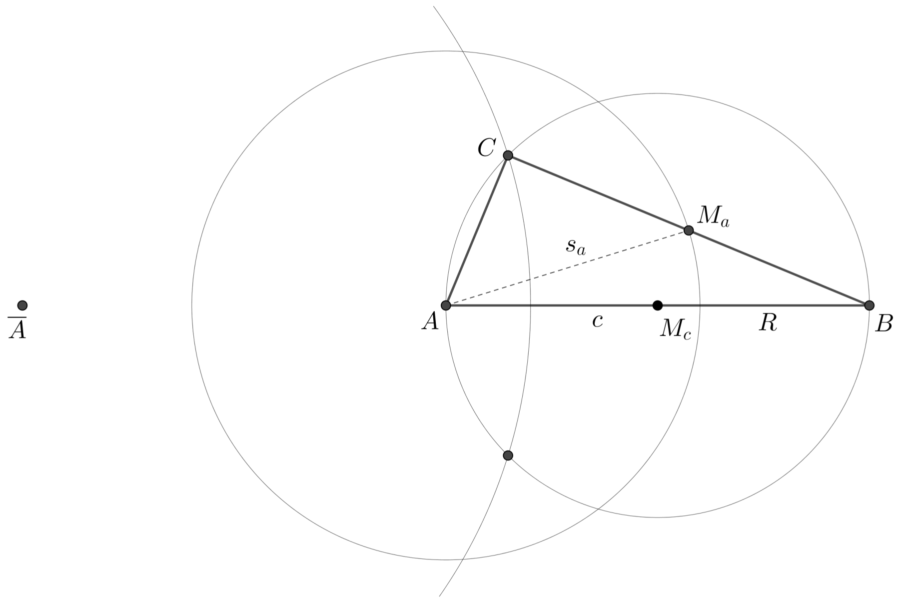


□

Eine Schwerlinie und Umkreisradius

Aufgabe 6. *Konstruiere rechtwinkelige Dreiecke mit* $R = 5\,\text{cm}$ *und* $s_a = 6\,\text{cm}$.

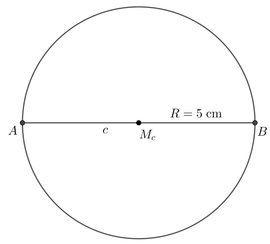




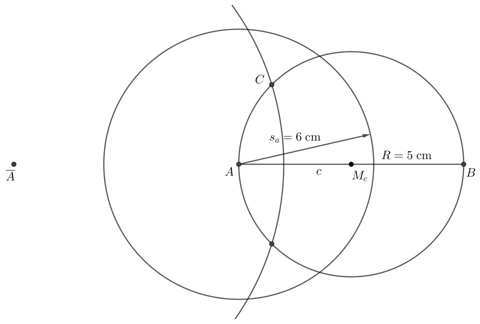
Der Fall $\beta = 90°$ ist zu dieser Lösung symmetrisch. Der Fall $\alpha = 90°$ kann nicht eintreten.

Lösung.
In einem rechtwinkeligen Dreieck ist die Länge der Schwerlinie im Eckpunkt, in dem sich der rechte Winkel befindet, sicher wegen des Satzes von Thales gleich dem Umkreisradius. Da die gegebene Länge s_a nicht mit dem Umkreisradius R übereinstimmt, muss s_a die Schwerlinie in einem der beiden Eckpunkte sein, die sich in den Endpunkten der Hypotenuse befinden.

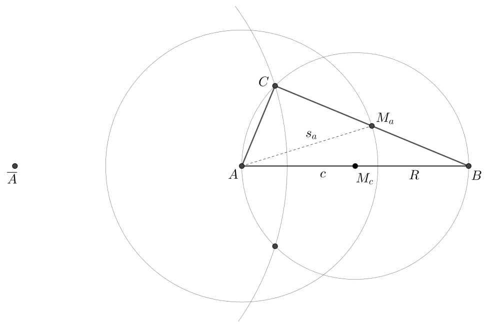
Wir beginnen also die Konstruktion, wie in Aufgabe 4, mit dem Umkreis von ABC mit dem Radius $R = 5$ cm und einem Durchmesser AB dieses Umkreises.



Wir wissen, dass der Mittelpunkt M_a der Seite a auf dem Kreis mit Mittelpunkt A und Radius s_a liegt. Ferner wissen wir, dass der Eckpunkt C aus diesem Punkt M_a durch zentrische Streckung aus dem Zentrum B mit Streckungsfaktor 2 hervorgeht. Strecken wir also den Kreis, auf dem M_a liegt aus B mit dem Streckungsfaktor 2, und schneiden den resultierenden Kreis (mit Mittelpunkt $\overline{A}$) mit dem bekannten Umkreis von ABC, erhalten wir mögliche Lagen von C.



Da wir nun alle drei Eckpunkte des Dreiecks kennen, ist die Aufgabe gelöst.



□