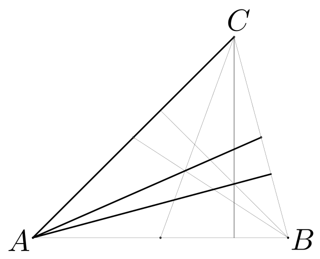
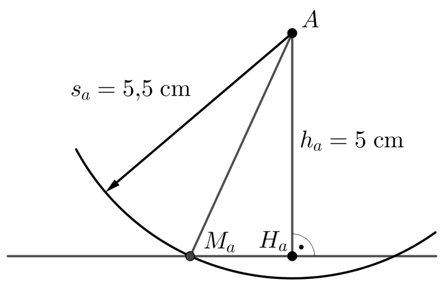
Schwerlinie, Höhe und Seite vom selben Eckpunkt ausgehend

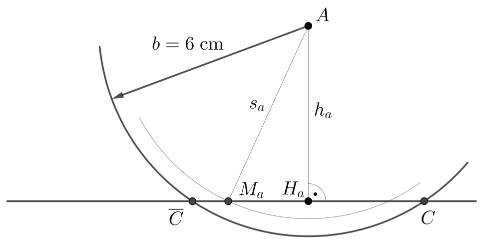
Aufgabe 1. *Konstruiere ein Dreieck mit* $h_a = 5\,\text{cm}$, $s_a = 5{,}5\,\text{cm}$ *und* $b = 6\,\text{cm}$.



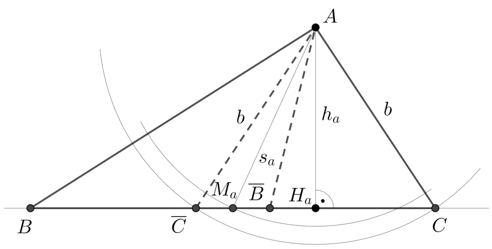
1) *Als ersten Schritt zeichnen wir die gegebene Strecke h_a mit den Endpunkten A und H_a. Die Seite a steht normal zu h_a und geht durch H_a, und da der Mittelpunkt M_a der Seite a den Abstand s_a von A hat, liegt er auf dem Kreis mit Mittelpunkt A und Radius s_a.*



2) *Da der Eckpunkt C den Abstand b von A hat, liegt er auf dem Kreis mit Mittelpunkt A und Radius b. Wir erhalten mögliche Lagen von C also in den Schnittpunkten dieses Kreises mit der bereits bestimmten Trägergeraden der Seite a. Die beiden möglichen Lösungen sind im Bild als C und $\overline{C}$ beschriftet.*

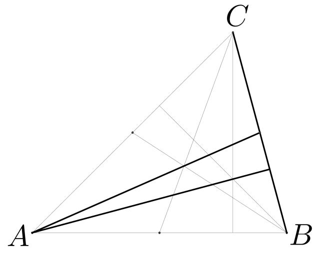


3) *Die jeweils zugehörigen Eckpunkte B bzw. $\overline{B}$ liegen dann symmetrisch bezüglich M_a, was die Konstruktion der beiden möglichen Lösungen ($\triangle\ ABC$ bzw. $\triangle\ A\overline{CB}$) abschließt.*

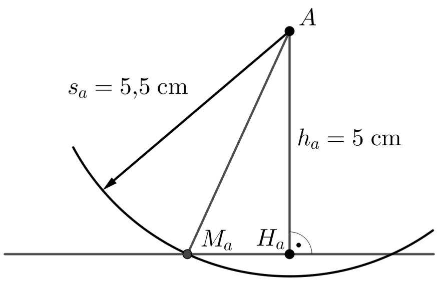


Schwerlinie und Höhe vom selben Eckpunkt und gegenüberliegende Seite

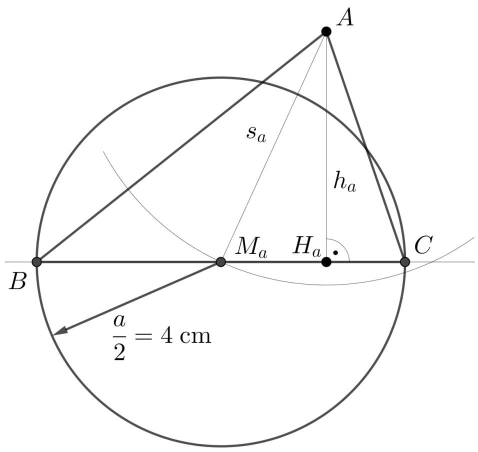
Aufgabe 2. *Konstruiere ein Dreieck mit* $h_a = 5\,\text{cm}$, $s_a = 5{,}5\,\text{cm}$ *und* $a = 8\,\text{cm}$.



1) Der erste Schritt dieser Konstruktion liefert auf dieselbe Art wie in Aufgabe 1 die Punkte A, H_a *und* M_a, *wobei letztere auf der Trägergeraden der Seite* a *von* $\triangle\ ABC$ *liegen.*

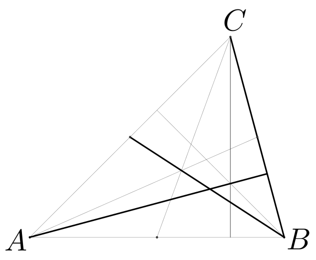


2) Nun wissen wir, dass die Punkte B *und* C *beide den Abstand* $\frac{a}{2}$ *von* M_a *haben. Wir erhalten also die Lagen dieser beiden Punkte als Schnittpunkte des Kreises mit Mittelpunkt* M_a *und Radius* $\frac{a}{2}$ *mit der Trägergeraden der Seite* a, *womit die Konstruktion abgeschlossen ist.*

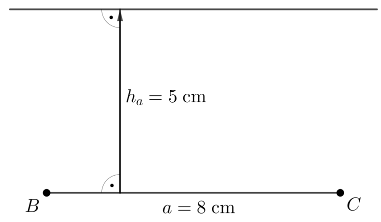


Schwerlinie und Seite vom selben Eckpunkt und Höhe auf gegebene Seite

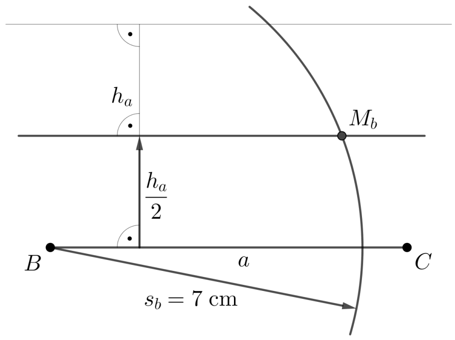
Aufgabe 3. *Konstruiere ein Dreieck mit* $h_a = 5\,\text{cm}$, $s_b = 7\,\text{cm}$ *und* $a = 8\,\text{cm}$.



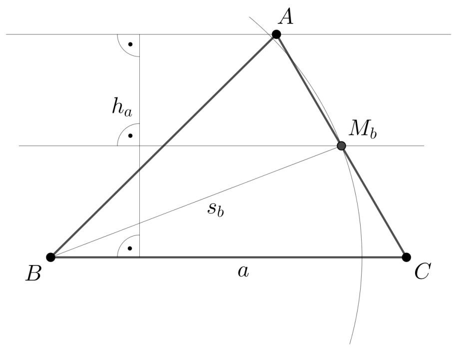
1) *Als ersten Schritt zeichnen wir eine Strecke BC der Länge a. Wir wissen, dass der Eckpunkt A von der Geraden BC den Abstand* h_a *hat, und somit auf der Geraden parallel zu BC liegt, die wir als Normale zur Normalen in diesem Abstand konstruieren.*



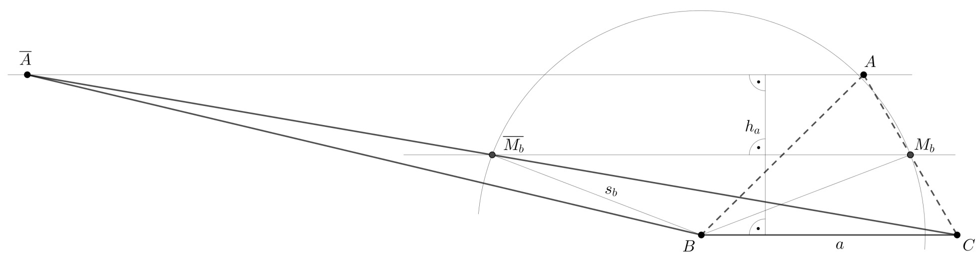
2) *Da der Punkt* M_b *der Mittelpunkt der Strecke AC ist, wobei C auf der Geraden BC liegt, und A auf der eben bestimmten Parallelen dazu, muss* M_b *auf der Mittenparallelen dieser beiden Geraden liegen. Ferner ist aber auch der Abstand von B zu* M_b *gleich* s_b, *womit* M_b *auch auf dem Kreis mit Mittelpunkt B und Radius* s_b *liegt.*



3) *Da der Punkt A auf der Geraden* CM_b *liegt, ist die Konstruktion eines Dreiecks mit den gegebenen Bestimmungsstücken somit abgeschlossen. In nebenstehender Figur wurde nur eine der beiden Lösungen dargestellt.*

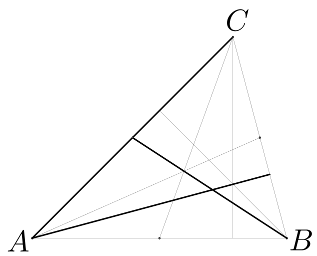


4) *Da der Kreis mit Radius* s_b *und Mittelpunkt B zwei Schnittpunkte mit der Mittenparallelen von BC und der dazu parallelen Trägergeraden von A hat, gibt es auch eine zweite mögliche Lage von* M_b, *und somit auch von A. Diese zweite Lösung ist schließlich in folgender Figur, aus Platzgründen verkleinert, dargestellt.*

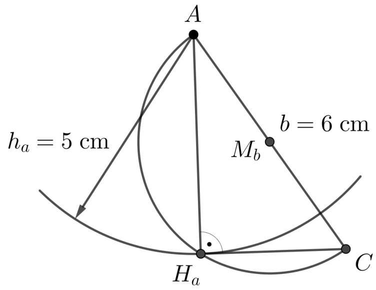


Höhe und Seite vom selben Eckpunkt und Schwerlinie auf gegebene Seite

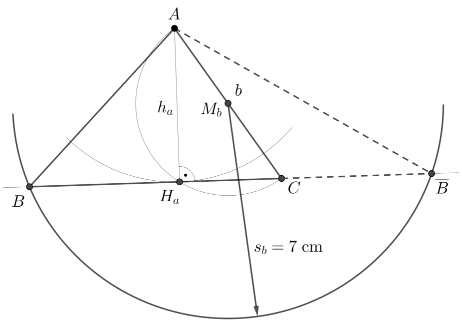
Aufgabe 4. *Konstruiere ein Dreieck mit* $h_a = 5\,\text{cm}$, $s_b = 7\,\text{cm}$ *und* $b = 6\,\text{cm}$.



1) *Als ersten Schritt zeichnen wir eine Strecke* AC *der Länge* b. *Da die Höhe durch* A *normal zur Geraden* $BC = H_aC$ *steht, gilt* $\angle CH_aA = 90°$, *womit* H_a *auf dem Thaleskreis über der Strecke* AC *liegt. Der Mittelpunkt dieses Thaleskreises ist der Mittelpunkt* M_b *der Strecke* AC. *Da aber* H_a *von* A *den Abstand* h_a *hat, können wir* H_a *als Schnittpunkt dieses Thaleskreises mit dem Kreis mit Mittelpunkt* A *und Radius* h_a *konstruieren.*

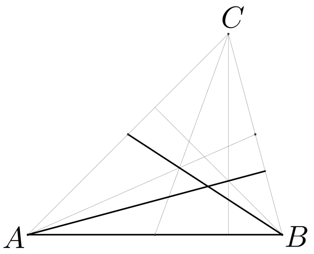


2) *Nun wissen wir aber, dass der Punkt* B *einerseits auf der Geraden* CH_a *liegen muss, andererseits aber auch auf dem Kreis mit Mittelpunkt* M_b *und Radius* s_b, *da der Abstand von* B *zu* M_b *gleich* s_b *ist. Somit erhalten wir die beiden möglichen Lagen von* B *als die Schnittpunkte dieses Kreises mit der Geraden* CH_a.

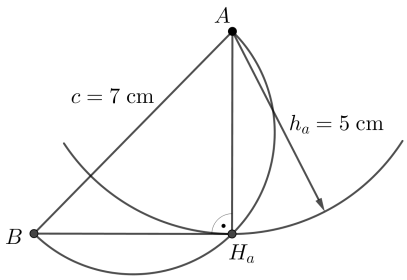


Höhe und Seite vom selben Eckpunkt und Schwerlinie auf nicht gegebene Seite

Aufgabe 5. *Konstruiere ein Dreieck mit* $h_a = 5\,\text{cm}$, $s_b = 7\,\text{cm}$ *und* $c = 7\,\text{cm}$.



1) Wir beginnen mit einem analogen Ansatz zu dem von Aufgabe 4. Als Erstes zeichnen wir eine Strecke AB der Länge c. Da die Höhe durch A normal zur Geraden $BC = H_aB$ steht, gilt $\angle AH_aB = 90°$, womit H_a auf dem Thaleskreis über der Strecke BC liegt. Da aber, wie in der Lösung zu Aufgabe 4, H_a von A den Abstand h_a hat, können wir H_a als Schnittpunkt dieses Thaleskreises mit dem Kreis mit Mittelpunkt A und Radius h_a konstruieren.



2) Nun wissen wir, dass der noch unbekannte Eckpunkt C des Dreiecks ABC von A doppelt so weit entfernt ist wie der Punkt M_b, und mit A und M_b auf einer gemeinsamen Geraden liegt. Kennen wir also den Punkt M_b, so ergibt sich C durch zentrische Streckung von M_b aus dem Zentrum A mit dem Faktor 2. Nun wissen wir aber, dass M_b sicher auf dem Kreis k_b, mit Mittelpunkt B und Radius s_b, liegt. Dies hat zur Folge, dass der Eckpunkt C auf dem Bildkreis k_b' von k_b bei zentrischer Streckung mit Zentrum A und dem Faktor 2 liegt. (Aus Platzgründen sind in der Abbildung nur Bogenstücke der Kreise k_b' dargestellt.)

3) Da nun C auf k_b' und auf BH_a liegen muss, sind die beiden möglichen Lagen von C durch deren Schnittpunkte bestimmt. In obiger Figur sehen wir die spitzwinkelige Lösung $\triangle\ ABC$ der Aufgabe dargestellt. In der unteren Figur sehen wir die stumpfwinkelige Lösung $\triangle\ A\overline{C}B$, die wieder aus Platzgründen verkleinert dargestellt wurde.