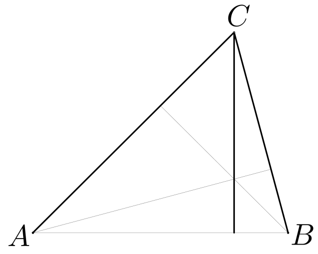
Zwei Seiten und eine eingeschlossene Höhe

Aufgabe 1. *Konstruiere ein Dreieck mit* $a = 6{,}5\,\text{cm}$, $b = 8\,\text{cm}$ *und* $h_c = 6\,\text{cm}$.

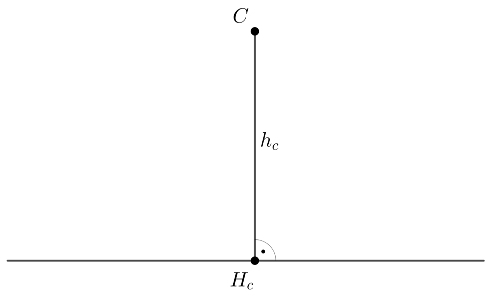
Ist ein Dreieck damit (bis auf Kongruenz) eindeutig bestimmt?

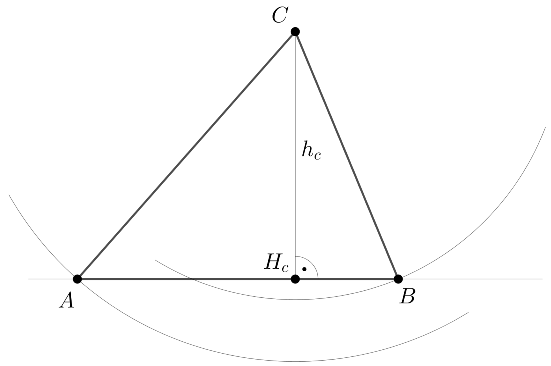


1) *Konstruiere die Strecke h_c mit Endpunkten C und H_c.*
   Konstruiere die Trägergerade von $c = AB$ normal zu h_c durch H_C.

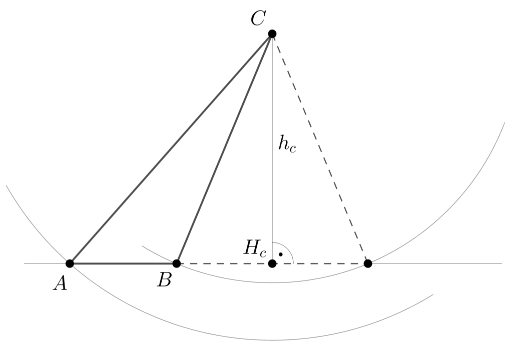
2) *Konstruiere den Kreis mit Radius $a = 6{,}5\,\text{cm}$ und Mittelpunkt C.*
   B ist ein Schnittpunkt dieses Kreises mit der Trägergerade von $c = AB$.

3) *Konstruiere den Kreis mit Radius $b = 8\,\text{cm}$ und Mittelpunkt C.*
   A ist ein Schnittpunkt dieses Kreises mit der Trägergerade von $c = AB$.





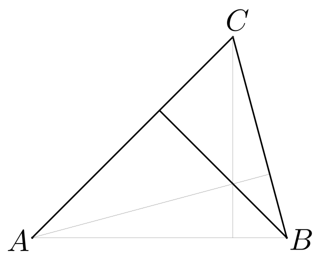
Die Schnittpunkte der Kreise mit der Trägergeraden sind nicht eindeutig.
Wählt man die Schnittpunkte A und B so, dass sie beide links von H_C liegen, erhält man ein stumpfwinkliges Dreieck mit den gleichen Bestimmungsstücken:



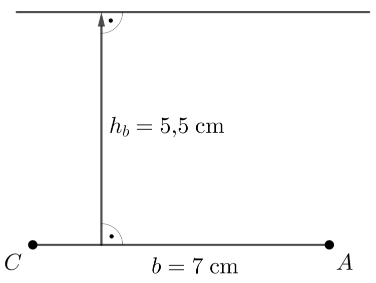
Zwei Seiten und eine zugehörige Höhe

Aufgabe 2. *Konstruiere ein Dreieck mit* $a = 6\,\text{cm}$, $b = 7\,\text{cm}$ *und* $h_b = 5{,}5\,\text{cm}$.

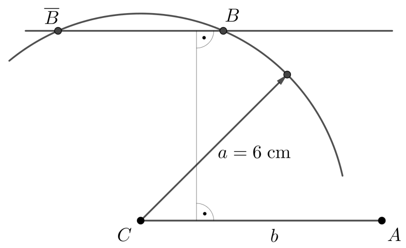
Ist ein Dreieck damit (bis auf Kongruenz) eindeutig bestimmt?



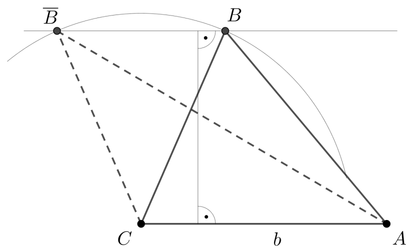
1) *Als ersten Schritt zeichnen wir die gegebene Strecke* $b = 7\,\text{cm}$ *mit den Endpunkten* A *und* C*. Da der Eckpunkt* B *den Normalabstand* $h_b = 5{,}5\,\text{cm}$ *zur Trägergerade von* AC *haben soll, liegt dieser Punkt auf einer Parallelen zu* AC *im Abstand* h_b*. Diese Parallele können wir konstruieren, indem wir zuerst auf einer beliebigen Normalen zu* AC *den Abstand* h_b *vom Fußpunkt auf* AC *abschlagen, und dann durch den resultierenden Punkt wiederum die Normale zu dieser Normalen konstruieren.*



2) *Da die Seite* $a = BC$ *die Länge* $6\,\text{cm}$ *hat, liegt der Punkt* B *außerdem auch auf dem Kreis mit Mittelpunkt* C *und Radius* $6\,\text{cm}$*. Wir erhalten also zwei mögliche Lagen von* B *in den beiden Schnittpunkten der Parallelen zu* AC *mit diesem Kreis. In dieser Figur ist eine mögliche Lage als* B *beschriftet und die andere als* $\overline{B}$*.*



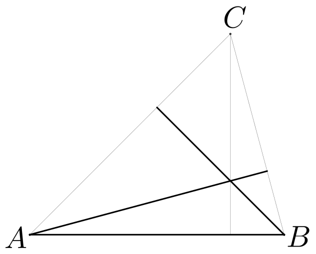
3) *In der nebenstehenden Figur sehen wir also die beiden möglichen Lösungen, wobei die Lösung mit dem Eckpunkt* $\overline{B}$ *strichliert gezeichnet ist.*



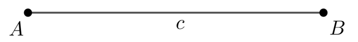
Eine Seite und zwei nicht zugehörige Höhen

Aufgabe 3. *Konstruiere ein Dreieck mit* $c = 8\,\text{cm}$*,* $h_a = 7\,\text{cm}$ *und* $h_b = 6\,\text{cm}$*.*

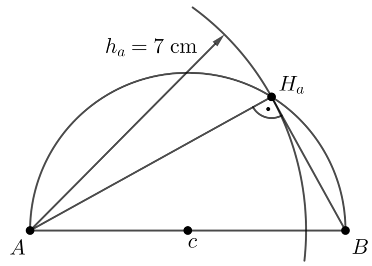
Ist ein Dreieck damit (bis auf Kongruenz) eindeutig bestimmt?



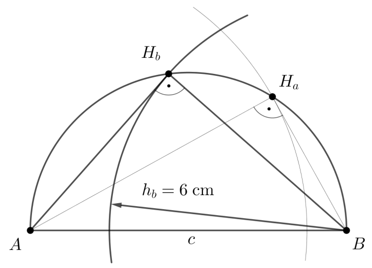
1) *Als ersten Schritt zeichnen wir die gegebene Strecke* c *mit den Endpunkten* A *und* B*.*



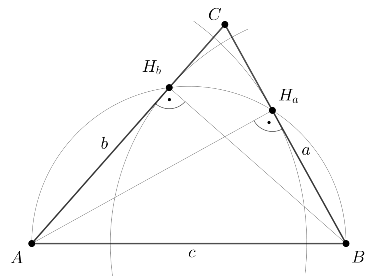
2) *Nun können wir den Fußpunkt* H_a *der Höhe* h_a *konstruieren. Da er den Abstand* $h_a = 7\,\text{cm}$ *von* A *hat, liegt er auf dem Kreis mit Mittelpunkt* A *und Radius* $7\,\text{cm}$*. Da ferner* AH_a *normal zur Seite* $a = BC$ *von* $\triangle ABC$ *steht, liegt* H_a *auch auf dem Thaleskreis über der Strecke* $c = AB$*.*



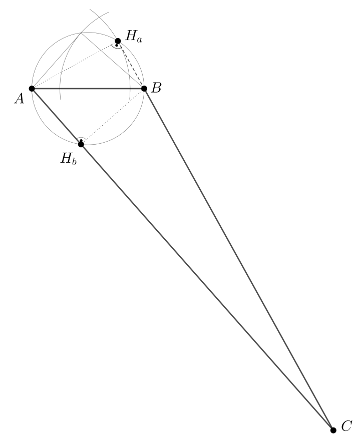
3) *Auf dieselbe Art können wir auch den Fußpunkt* H_b *der Höhe* h_b *konstruieren. Da er den Abstand* $h_b = 6\,\text{cm}$ *von* B *hat, liegt er auf dem Kreis mit Mittelpunkt* B *und Radius* $6\,\text{cm}$*. Da* BH_b *normal zur Seite* $b = CA$ *von* $\triangle ABC$ *steht, liegt* H_b *ebenso wie* H_a *auf dem Thaleskreis über der Strecke* $c = AB$*.*



4) *Da wir nun die beiden Geraden* $a = BH_a$ *und* $b = AH_b$ *kennen, können wir den Eckpunkt* C *von* $\triangle ABC$ *als Schnittpunkt dieser beiden Geraden bestimmen, womit das Dreieck vollständig bestimmt ist.*



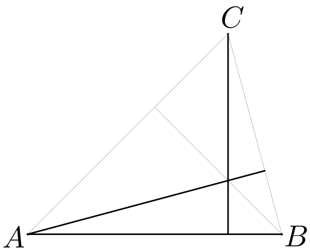
Vielleicht ist es etwas überraschend, dass es auch in diesem Fall eine zweite Lösung gibt. Wir haben nämlich auch bei dieser Lösung etwas angenommen, das in der Angabe nicht vorgegeben war, nämlich, dass die Punkte H_a *und* H_b *auf derselben Seite der Geraden* AB *liegen. Nehmen wir aber das Gegenteil an, dass also* H_a *und* H_b *auf gegenüberliegenden Seiten von* AB *liegen, erhalten wir eine zweite Lösung, die, aus Platzgründen verkleinert, rechts zu sehen ist.*



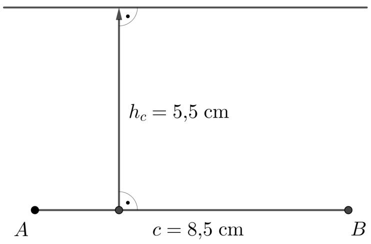
Eine Seite mit zugehöriger Höhe und eine weitere Höhe

Aufgabe 4. *Konstruiere ein Dreieck mit* $c = 8{,}5\,\text{cm}$, $h_a = 7\,\text{cm}$ *und* $h_c = 5{,}5\,\text{cm}$.

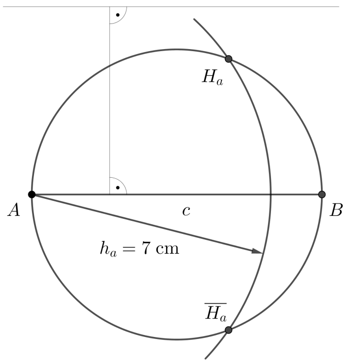
Ist ein Dreieck damit (bis auf Kongruenz) eindeutig bestimmt?



1) *Als ersten Schritt zeichnen wir die gegebene Strecke* $c = 8{,}5\,\text{cm}$ *mit den Endpunkten* A *und* B. *Da der Eckpunkt* C *den Normalabstand* $h_c = 5{,}5\,\text{cm}$ *zur Trägergerade von* AB *haben soll, liegt dieser Punkt auf einer Parallelen zu* AB *im Abstand* h_c. *Diese Parallele können wir konstruieren, indem wir zuerst auf einer beliebigen Normalen zu* AB *den Abstand* h_c *vom Fußpunkt auf* AB *abschlagen, und dann durch den resultierenden Punkt wiederum die Normale zu dieser Normalen konstruieren.*

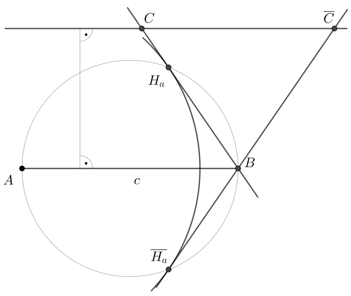


2) *Nun können wir den Fußpunkt* H_a *der Höhe* h_a *konstruieren. Da er den Abstand* $h_a = 7\,\text{cm}$ *von* A *hat, liegt er auf dem Kreis mit Mittelpunkt* A *und Radius* $7\,\text{cm}$. *Da ferner* AH_a *normal zur Seite* $a = BC$ *von* $\triangle ABC$ *steht, liegt* H_a *auch auf dem Thaleskreis über der Strecke* $c = AB$.

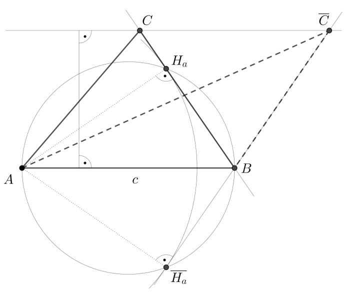


Wir erhalten zwei mögliche Lagen von H_a, *wovon eine in der Figur mit* $\overline{H_a}$ *beschriftet wurde.*

Da der Eckpunkt C *auf der Geraden* BH_a *liegt, erhalten wir somit zu jedem* H_a *eine zugehörige Lage von* C *indem wir die Verbindungsgerade von* B *mit* H_a *mit der zuvor bestimmten Parallelen zu* AB *schneiden. (Der zu* $\overline{H_a}$ *gehörige Eckpunkt wird mit* $\overline{C}$ *beschriftet.)*

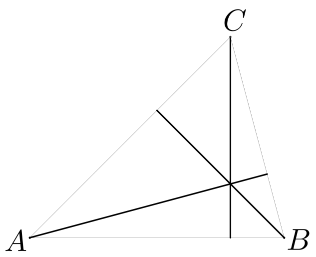


In nebenstehender Figur sehen wir also die beiden möglichen Lösungen, wobei die Lösung mit dem Eckpunkt $\overline{C}$ *strichliert gezeichnet ist. Die Höhe* AH_a *von* $\triangle ABC$ *ist jeweils punktiert gezeichnet.*



Drei Höhen

Aufgabe 5. *Konstruiere ein Dreieck mit $h_a = 8\,\text{cm}$, $h_b = 7\,\text{cm}$ und $h_c = 6{,}5\,\text{cm}$.*



Hinweis: Überlege dir mit der Flächenformel, dass für jedes Dreieck

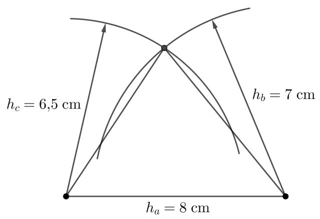
$$a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c} \quad \text{und} \quad h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

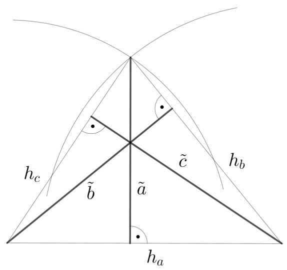
gilt.
Wenn die Höhen des Dreiecks mit Seitenlängen h_a, h_b, h_c die Längen $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ und $\tilde{c}$ haben, dann ist das Dreieck mit Seitenlängen $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ und $\tilde{c}$ also ähnlich zum gesuchten Dreieck.

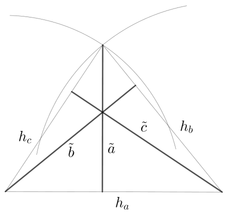
1) *Im ersten Schritt konstruieren wir ein Dreieck mit den Seitenlängen h_a, h_b und h_c.*

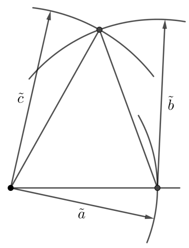
2) *Im nächsten Schritt ergänzen wir die Höhen in diesem Dreieck, die wir mit $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ und $\tilde{c}$, der Reihe nach normal zu den Seiten der Längen h_a, h_b bzw. h_c, bezeichnen.*

3) *Nun wissen wir, dass das Dreieck mit den Seitenlängen $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ und $\tilde{c}$ zum gesuchten Dreieck ähnlich ist. Wir konstruieren also im dritten Schritt ein solches Dreieck.*









4) *Das gesuchte Dreieck ist ähnlich zu diesem und besitzt die Höhe $h_a = 8\,\text{cm}$. Wir können also eine zentrische Streckung ausführen, die die Höhe dieses Dreiecks auf die geforderte Länge transformiert. Zu diesem Zweck ziehen wir, wie zu sehen, eine Parallele zur Seite des eben bestimmten Dreiecks im Abstand $h_a = 8\,\text{cm}$, und schneiden diese mit der Verlängerung der Seite mit der Länge $\tilde{c}$.*

5) *Dies ergibt, wie schließlich in der letzten Zeichnung zu sehen ist, die Seite c im gesuchten Dreieck. Da die Seite b parallel zu jener mit der Länge $\tilde{b}$ liegen muss, kann das gesuchte Dreieck vervollständigt werden.*