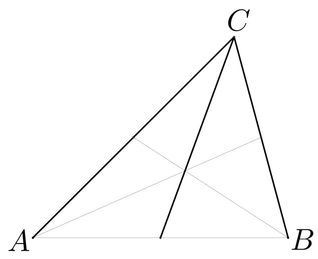
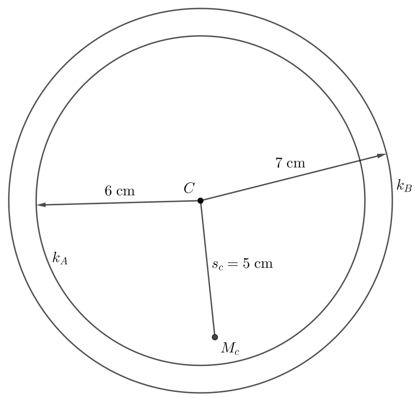
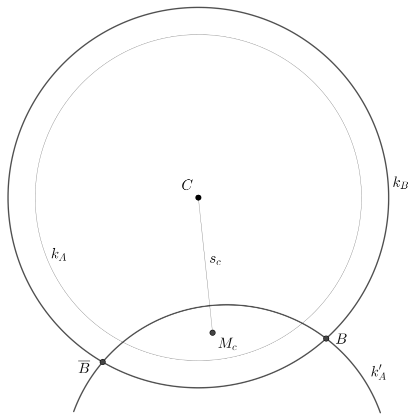
Zwei Seiten und die Schwerlinie auf die dritte Seite

Aufgabe 1. *Konstruiere ein Dreieck mit* $a = 7\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$ *und* $s_c = 5\,\text{cm}$.

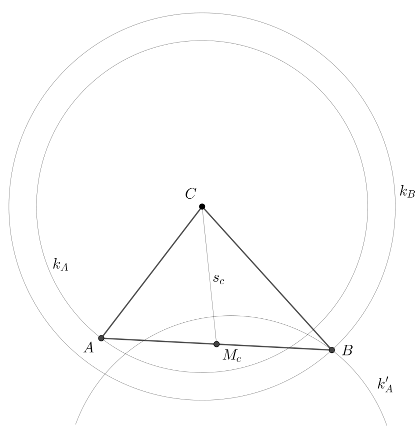




1) *Als ersten Schritt zeichnen wir die gegebene Strecke s_c mit den Endpunkten C und M_c. Da der Abstand von C zu A gleich b ist, liegt der Eckpunkt A des Dreiecks ABC auf dem Kreis k_A mit Mittelpunkt C und Radius b. Auf dieselbe Art stellen wir fest, dass der Eckpunkt B des Dreiecks ABC auf dem Kreis k_B mit Mittelpunkt C und Radius a liegt, da der Abstand von C zu B gleich a ist.*



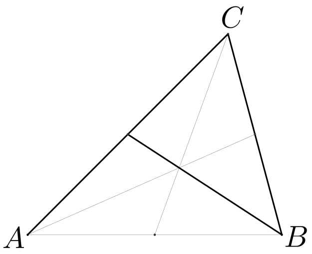
2) *Da A und B von M_c gleich weit entfernt sind, können wir nun eine Spiegelung am Punkt M_c anwenden um mögliche Lagen von A und B auf den Kreisen k_A und k_B zu bestimmen. Spiegeln wir nämlich den Punkt A an M_c, so geht er in den Punkt B über. Spiegeln wir also graphisch den Kreis k_A, der aus allen möglichen Lagen von A besteht, an M_c, so muss der zu A bezüglich M_c symmetrische Punkt, also B, auf dem resultierenden Kreis $\overline{k_A}$ liegen. Da dieser aber sicher auch auf dem Kreis k_B liegt, muss B ein Schnittpunkt von $\overline{k_A}$ mit k_B sein. Die beiden möglichen Lösungen, die im Bild als B und $\overline{B}$ beschriftet sind, liegen ebenso wie die beiden Kreise k_A und k_B symmetrisch bezüglich der Geraden CM_c, was zur Folge hat, dass die beiden Lösungen kongruent sind.*



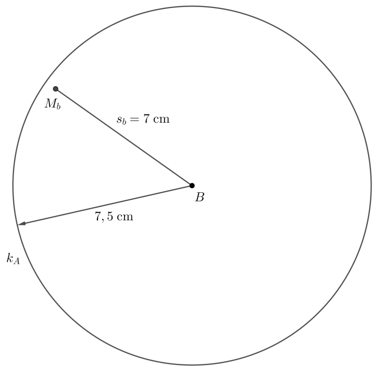
3) *Wir beschränken uns also im Weiteren auf den Punkt B. Da der Eckpunkt A zu B bezüglich M_c symmetrisch liegt, erhalten wir somit A als Spiegelbild von B (auf k_A liegend), was die Konstruktion des Dreiecks abschließt.*

Zwei Seiten und Schwerlinie auf gegebene Seite

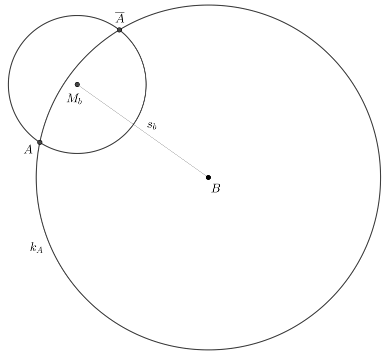
Aufgabe 2. *Konstruiere ein Dreieck mit* $a = 7{,}5\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$ *und* $s_b = 7\,\text{cm}$.



1) *Wir beginnen mit einem ähnlichen Ansatz wie in der vorangehenden Aufgabe. Als ersten Schritt zeichnen wir die gegebene Strecke* s_b *mit den Endpunkten* B *und* M_b. *Da der Abstand von* C *zu* A *gleich* b *ist, liegt der Eckpunkt* A *des Dreiecks* ABC *auf dem Kreis* k_A *mit Mittelpunkt* C *und Radius* b.

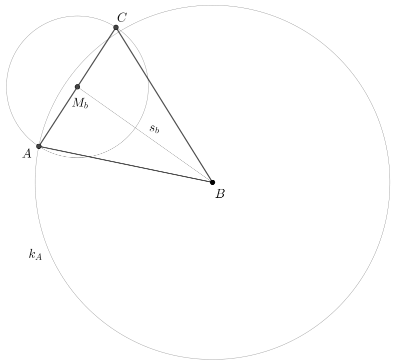


2) *Nun ist* M_b *der Mittelpunkt der Strecke* CA, *womit der Abstand von* M_b *zu* A *gleich* $\frac{b}{2}$ *ist. Der Punkt* A *liegt somit neben* k_A *auch auf dem Kreis* k_2 *mit Mittelpunkt* M_b *und Radius* $\frac{b}{2}$.



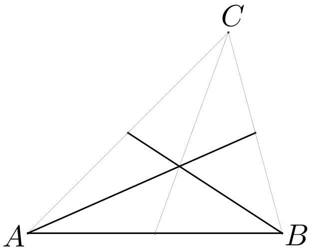
3) *Wie in Aufgabe 1 ergeben sich zwei Lagen des Punktes, die symmetrisch bezülich der Schwerlinie liegen, womit sich kongruente Lösungen der Aufgaben ergeben. Wir können uns also im Weiteren wieder auf einen Punkt* A *beschränken.*

Den noch fehlenden Eckpunkt C *des Dreiecks* ABC *erhalten wir jetzt durch Spiegelung von* A *an* M_b, *womit das Dreieck fertig konstruiert ist.*



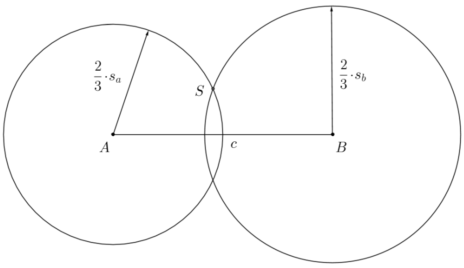
Eine Seite und zwei Schwerlinien der beiden Eckpunkte der Seite

Aufgabe 3. *Konstruiere ein Dreieck mit* $c = 8\,\text{cm}$, $s_a = 6\,\text{cm}$ *und* $s_b = 7\,\text{cm}$.

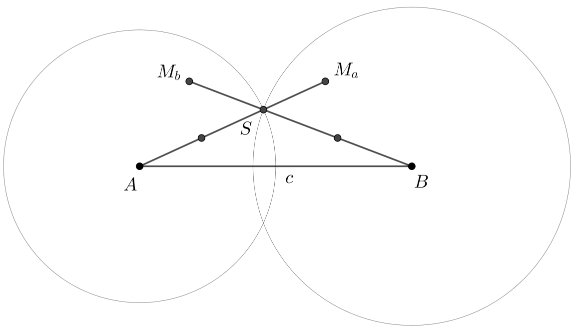


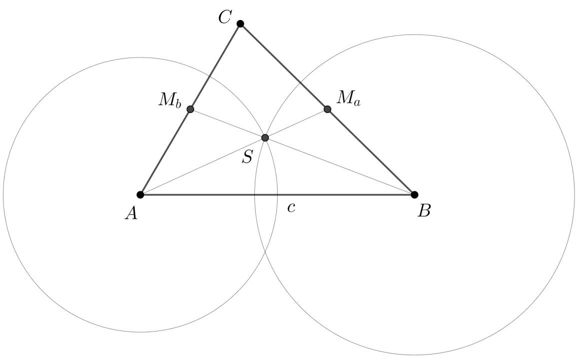
1) *Wir konstruieren zuerst die gegebene Strecke c mit den Endpunkten AB.*

2) *Dann nutzen wir die bekannte Tatsache aus, dass der Schwerpunkt S jede Schwerlinie eines Dreiecks drittelt.* *Mehr dazu findest du auf dem GB – Schwerlinien und Schwerpunkt*
Diese Tatsache hat zur Folge, dass der Abstand von S zu A genau zwei Drittel von s_a *beträgt, und der Abstand von S zu B genau zwei Drittel von* s_b. *Der Punkt S ist also ein Schnittpunkt des Kreises mit Mittelpunkt A und dem Radius* $\frac{2}{3} \cdot s_a$ *mit dem Kreis mit Mittelpunkt B und dem Radius* $\frac{2}{3} \cdot s_b$.



3) *Wir erhalten also den Punkt* M_a *indem wir den Mittelpunkt von AS an S spiegeln, und den Punkt* M_b *indem wir den Mittelpunkt von BS an S spiegeln.*



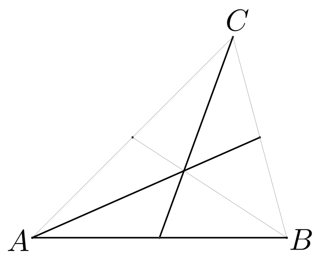


4) *Den fehlenden Eckpunkt C erhalten wir jetzt am einfachsten als Schnittpunkt der beiden Seitenträgergeraden* AM_b *und* BM_a.

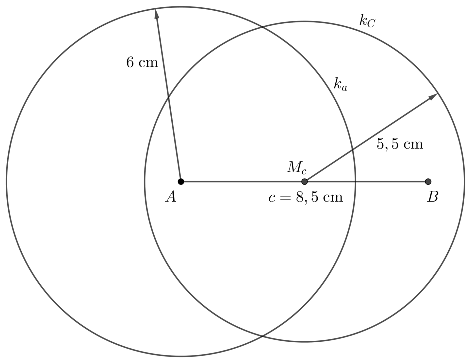
5) *Natürlich könnten wir C im letzten Schritt auch durch Spiegelung von A an* M_b *oder von B an* M_a *erhalten, oder auch durch zentrische Streckung vom Mittelpunkt von AB aus S mit dem Faktor* -2.

Eine Seite und zwei Schwerlinien, eine davon auf die gegebene Seite

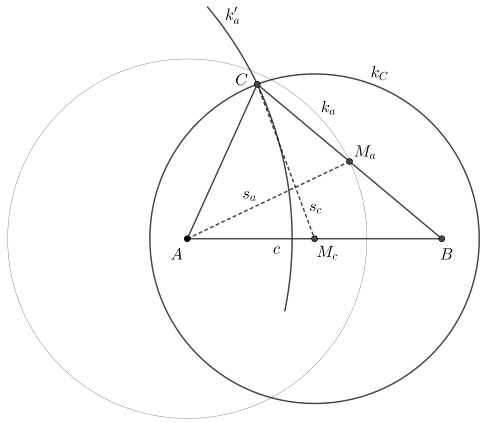
Aufgabe 4. *Konstruiere ein Dreieck mit* $c = 8{,}5\,\text{cm}$, $s_a = 6\,\text{cm}$ *und* $s_c = 5{,}5\,\text{cm}$.



1) *Wie in Aufgabe 3 zeichnen wir als Erstes die gegebene Strecke c mit den Endpunkten AB. Dazu ergänzen wir gleich den Kreis* k_a *mit Mittelpunkt A und Radius* s_a*, auf dem sicher der Punkt* M_a *liegen muss. Außerdem zeichnen wir den Kreis* k_C *mit Mittelpunkt* M_c *und Radius* s_c*, auf dem sicher der Eckpunkt C von* $\triangle ABC$ *liegt.*

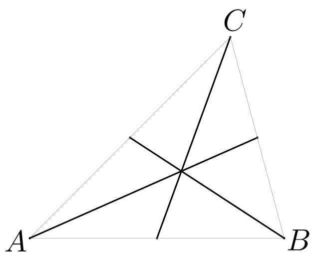


2) *Nun können wir ebenso wie in der ersten Lösungsvariante von Aufgabe 3 die Tatsache ausnutzen, dass der Eckpunkt C auf dem Bildkreis* k_a' *von* k_a *bei zentrischer Streckung mit Zentrum B und dem Faktor 2 liegt, da C auch von B doppelt so weit entfernt ist wie der Punkt* M_a*, von dem wir aber wissen, dass es sicher auf* k_a *liegt. Es ergibt sich C also als Schnittpunkt von* k_C *mit* k_a'*, wobei wir wieder nur die obere der beiden kongruenten Dreiecke in der Figur dargestellt sehen.*



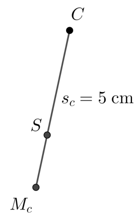
Drei Schwerlinien

Aufgabe 5. *Konstruiere ein Dreieck mit* $s_a = 6\,\text{cm}$, $s_b = 7\,\text{cm}$ *und* $s_c = 5\,\text{cm}$.



Um diese Aufgabe zu lösen wenden wir wieder die Tatsache an, dass der Schwerpunkt alle drei Schwerlinien des Dreiecks drittelt, und daher insbesondere der gemeinsame Punkt aller drei Schwerlinien des Dreiecks ist.

1) *Wir zeichnen zuerst ein Schwerlinie, in der Figur haben wir zu diesem Zweck* s_c *ausgewählt, und den darauf liegenden Punkt* S. *Für diesen gilt* $2 \cdot SM_c = SC$.



Eine vorgegebene Strecke kann mit Hilfe des Strahlensatzes in drei gleich große Teile mit Zirkel und Lineal geteilt werden. Mehr dazu findest du auf dem GB – Strahlensatz als Konstruktionswerkzeug.

2) *Da* S *alle Schwerlinien drittelt, liegt der Eckpunkt* A *auf dem Kreis* k_A *mit Mittelpunkt* S *und Radius* $\frac{2}{3} \cdot s_a$. *Ebenso liegt der Eckpunkt* B *auf den Kreis* k_B *mit Mittelpunkt* S *und Radius* $\frac{2}{3} \cdot s_b$.

3) *Nun wissen wir, dass* M_c *der Mittelpunkt der Strecke* AB *ist. Spiegelt man also den Punkt* A *an* M_c, *so wird er auf* B *abgebildet. Wir wissen aber, dass* A *auf* k_A *liegt, womit sein Spiegelbild auf dem Spiegelbild* k'_A *von* k_A *bezüglich* M_c *liegt. Außerdem liegt dieser Punkt* B *aber auch auf* k_B, *und* B *ist somit ein Schnittpunkt von* k'_A *und* k_B.

4) *Wie in den letzten Aufgaben ergeben sich wieder zwei mögliche Lagen von* B, *die hier als* B *und* $\overline{B}$ *beschriftet sind. Da sie symmetrisch bezüglich* s_c *liegen, ergeben sie aber wieder kongruente Lösungen, und wir können uns auf eine Lösung beschränken. Da nun* A *zu* B *bezüglich* M_c *symmetrisch liegt, können wir das Dreieck* ABC *sofort vervollständigen.*