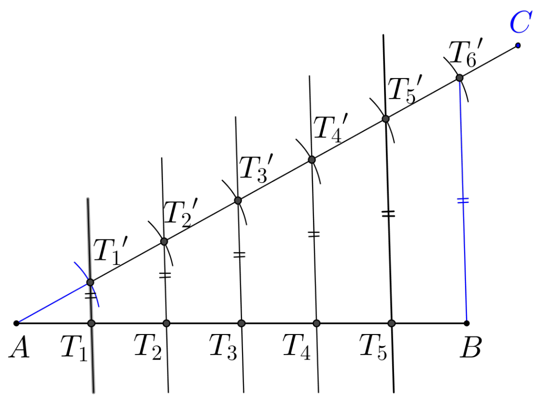
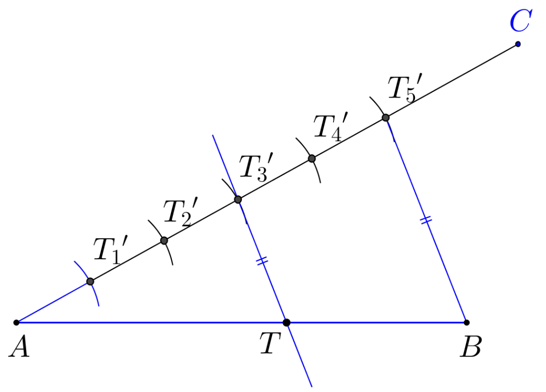
Streckenteilung in gleich lange Teilstrecken konstruieren

Aufgabe 1. *Teile die Strecke AB in 6 gleich lange Teilstrecken.*



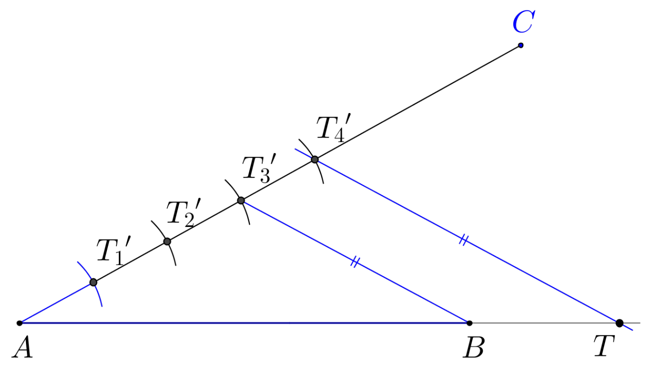
Inneren Teilungspunkt konstruieren

Aufgabe 2. *Teile die Strecke AB innen im Verhältnis $3:2$.*



Äußeren Teilungspunkt konstruieren

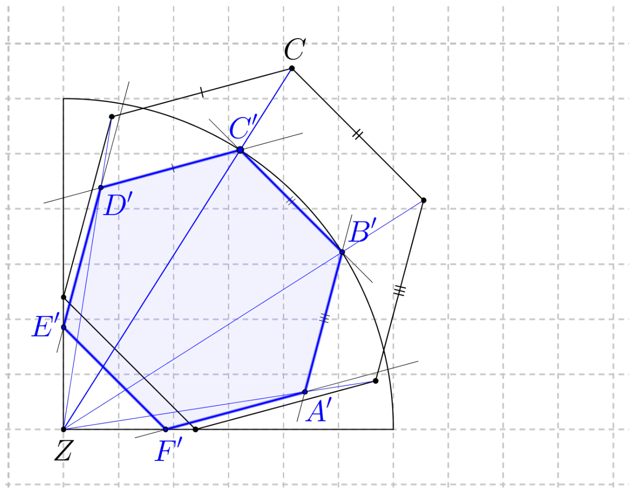
Aufgabe 3. *Bestimme einen Punkt T außerhalb der Strecke AB mit $AT : BT = 3 : 1$.*

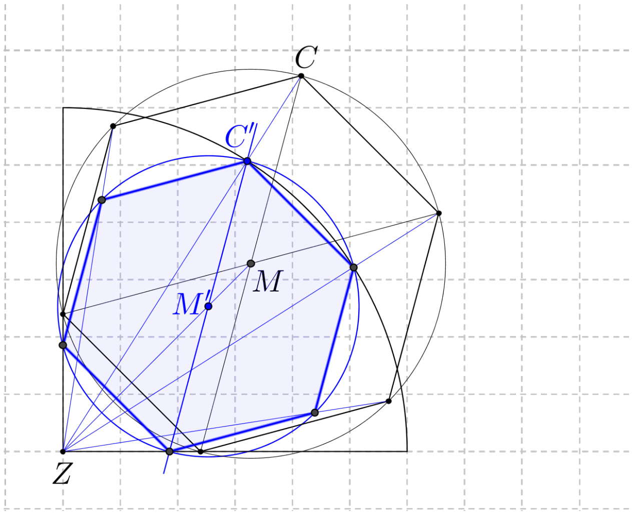


Regelmäßiges Sechseck zentrisch strecken

Aufgabe 4. *Strecke das regelmäßige Sechseck mit dem Zentrum Z so, dass der Eckpunkt C des Sechsecks auf dem Kreisbogen des Viertelkreises liegt.*

Wir geben zwei Konstruktionsvarianten an:





1) Wir bestimmen den Schnittpunkt C' von ZC mit dem Viertelkreis.

2) Schneiden wir die Strahlen (Z zu den Eckpunkten des ursprünglichen Sechsecks) mit den Parallelen zu den Sechsecksseiten durch C' so erhalten wir die Punkte D' bzw. B'.

3) Analog konstruieren wir ausgehend von B' und C' die Punkte A' bzw. E'.

4) Auf gleiche Weise konstruieren wir schließlich F'.

1) Wir bestimmen den Schnittpunkt C' von ZC mit dem Viertelkreis.

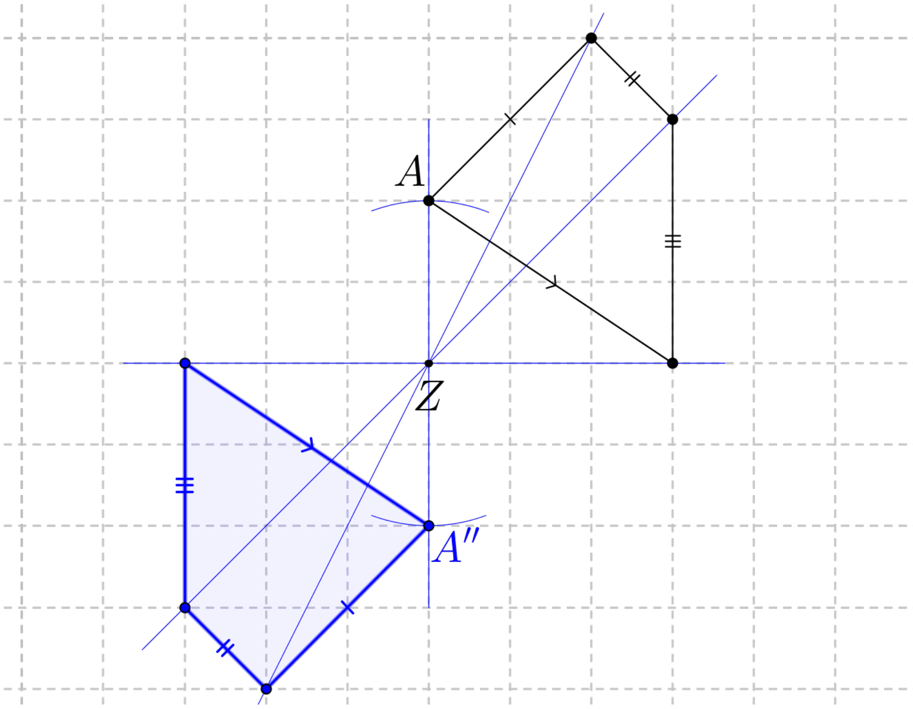
2) Wir bestimmen den Mittelpunkt M des gegebenen Sechsecks (Schnittpunkt zweier Hauptdiagonalen)

3) Der Mittelpunkt M' des gestreckten Sechsecks ist der Schnittpunkt des Strahls ZM mit der Parallelen zu CM durch C'.

4) Die Punkte des gestreckten Sechsecks sind jeweils einer der beiden Schnittpunkte des Kreises mit Mittelpunkt M' und Radius $C'M'$ mit den Strahlen von Z zu den Eckpunkten des ursprünglichen Sechsecks.

Punktspiegelung

Aufgabe 5. *Spiegle das Viereck am Punkt Z.* *Strecke es also mit Zentrum Z und Skalierungsfaktor $k = -1$.*



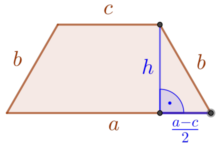
1) Wir konstruieren den Spiegelungspunkt A'', indem wir den Strahl AZ über Z hinaus mit dem Kreis mit Mittelpunkt Z und Radius ZA schneiden.

2) Wir verschiebe die urspünglichen Vierecksseiten parallel durch A'' und schneiden sie mit den Strahlen durch Z.

Bemerkung: Da alle Eckpunkte des ursprünglichen Vierecks auf Gitterpunkten liegen, trifft dies auch auf die Punkte des gespiegelten Vierecks zu.

Flächeninhalt gestreckter Trapeze

Aufgabe 6. *Ein gleichschenkeliges Trapez mit Seitenlängen $a = 10\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$ und $c = 4\,\text{cm}$ wird mit dem Faktor* ***a)*** $k = 3$ ***b)*** $k = -0{,}6$ *gestreckt.*
Welchen Flächeninhalt hat das gestreckte Trapez?



Wir berechnen zunächst die Fläche A des gegebenen Trapez und verwenden dann, dass die Fläche des gestreckten Trapzes gleich $A_k = A \cdot k^2$ ist. Es ist

$$A = \frac{(c+a)\cdot h}{2}$$

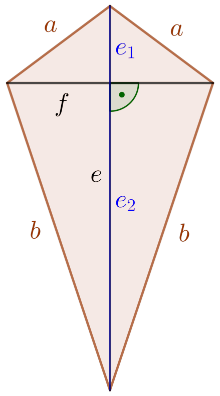
Wir müssen also h bestimmen. Nach dem Satz des Pythagoras gilt im gleichschenkeligen Trapez

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 = 16 \quad\Longrightarrow\quad h = 4\,\text{cm}$$

Also gilt $A = 28\,\text{cm}^2$ und
a) $A_3 = 28\,\text{cm}^2 \cdot 3^2 = 252\,\text{cm}^2$ ***b)*** $A_{-0{,}6} = 28\,\text{cm}^2 \cdot (-0{,}6)^2 = 10{,}08\,\text{cm}^2$

Flächeninhalt gestreckter Deltoide

Aufgabe 7. *Mit welchem positiven Faktor muss ein Deltoid mit* $a = 5\,\text{cm}$, $e = 15\,\text{cm}$ *und* $f = 8\,\text{cm}$ *gestreckt werden, wenn die Fläche des gestreckten Deltoids* $135\,\text{cm}^2$ *betragen soll?*
Berechne den Umfang des gestreckten Deltoids.



Der Umfang U *und die Fläche* A *des gegebenen Deltoids sind* $U = 2\cdot(a+b)\,\text{cm}$ *und* $A = \frac{e\cdot f}{2} = 60\,\text{cm}^2$*. Wir wollen den Streckungfaktor* k *bestimmen. Für die Fläche* $135\,\text{cm}^2 = A_k$ *des gestreckten Deltoids gilt*

$$A_k = A\cdot k^2 \iff 135 = 60\cdot k^2$$

Der Streckungsfaktor ist also $k = \frac{3}{2}$.
Um den Umfang U_k *des gestreckten Deltoids zu bestimmen, müssen wir zuerst* b *bestimmen. Wir teilen* e *in* e_1 *und* e_2 *auf. Wir berechnen mittels Satz des Pythagoras* $e_1 = \sqrt{a^2 - \left(\frac{f}{2}\right)^2} = 3$

Mit $e_2 = e - e_1$ *erhalten wir*

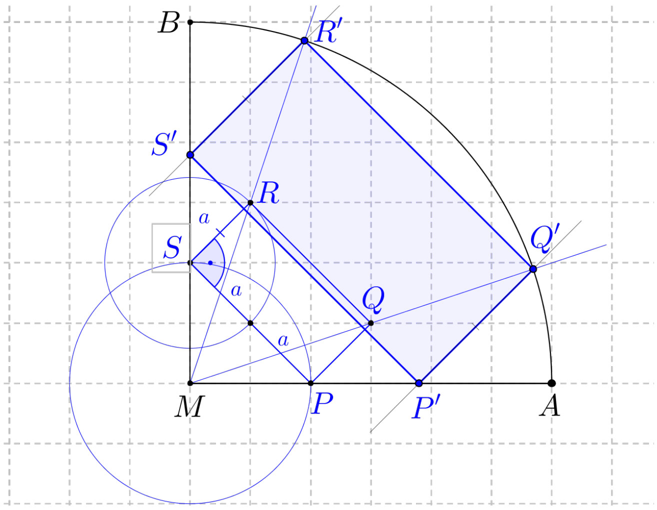
$$b = \sqrt{\left(\frac{f}{2}\right)^2 + e_2^2} = \sqrt{160} = 4\cdot\sqrt{10}\,\text{cm}$$

Also ist $U = (10 + 8\cdot\sqrt{10})\,\text{cm}$ *und der Umfang*

$$U_k = U\cdot k = (10 + 8\cdot\sqrt{60})\,\text{cm}\cdot\frac{3}{2} = (15 + 12\cdot\sqrt{10})\,\text{cm}$$

Rechteck mit gegebenem Seitenverhältnis einschreiben

Aufgabe 8. *Konstruiere ein Rechteck, dessen Seiten im Verhältnis $2:1$ stehen, von dem zwei Eckpunkte auf dem Viertelkreis liegen und jeweils ein Eckpunkt auf den Strecken MA bzw. MB liegt.*



Wir konstruieren ein Rechteck $PQRS$, das die Bedingungen

a) *Verhältnis der Seiten ist $2:1$ und*

a) *je ein Eckpunkt liegt auf der Strecke MA bzw. MB*

erfüllt. Danach konstruieren wir mittels zentrischer Streckung mit Zentrum M ein Rechteck $P'Q'R'S'$, das auch der letzten Bedingung genügt.
Wir nutzen für die Konstruktion von $PQRS$ weiters aus, dass das Rechteck symmetrisch innerhalb des Viertelkreises (d.h. symmetrisch bezüglich der Streckensymmetrale auf AB) liegen muss, damit $P'Q'R'S'$ die dritte Bedingung erfüllen kann.

1) *Ein Kreis mit Mittelpunkt M und beliebigem Radius schneidet die Strecken MA und MB in P bzw. S.*

2) *Der Schnittpunkt der Normalen auf PS durch S mit dem Kreis mit Mittelpunkt S und Radius $a = \frac{PS}{2}$ ist R.*

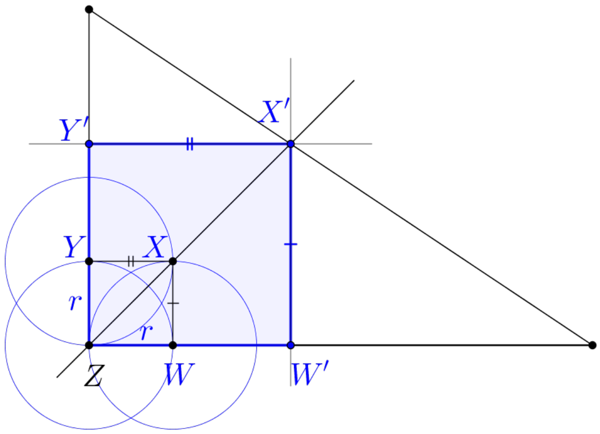
3) *Q ist der Schnittpunkt der Parallelen zu PS durch R und der Parallelen zu SR durch P.*

4) *Die Strahlen MQ und MR schneiden den Viertelkreis in den Punkten Q' bzw. R'.*

5) *Durch Parallelverschiebung der Rechtecksseite RS durch R' bzw. Q' erhalten wir als Schnittpunkte mit MA bzw. mit MB die Punkte P‘ und Q'.*

Quadrat in rechtwinkliges Dreieck einschreiben

Aufgabe 9. *Einem rechtwinkeligen Dreieck soll ein Quadrat so eingeschrieben werden, dass zwei Seiten auf den beiden Katheten liegen und ein Eckpunkt auf der Hypotenuse des Dreiecks. Konstruiere ein solches Quadrat:*



1) *Konstruiere ein Quadrat $WXYZ$ beliebiger Größe, sodass zwei Seiten auf den Katheten des rechtwinkeligen Dreieck liegen.*

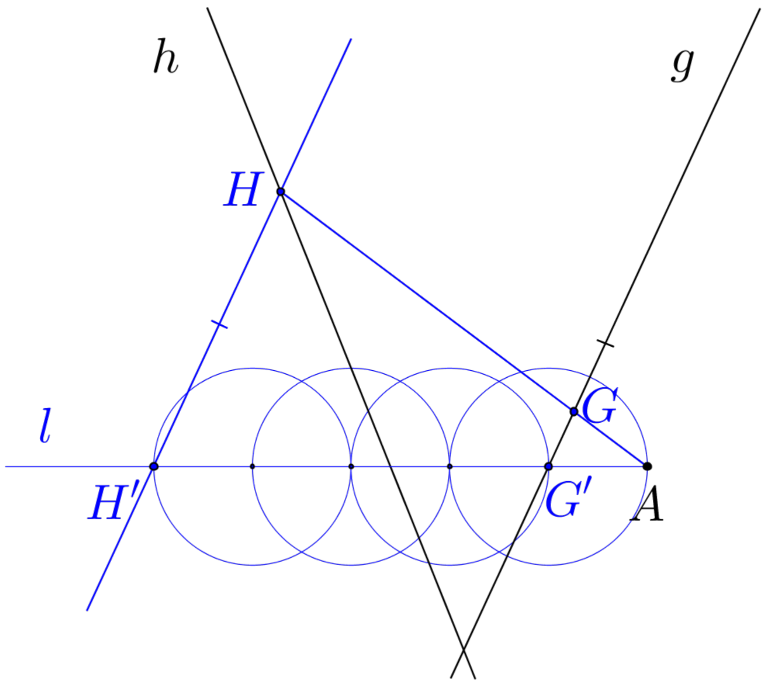
- **a)** *Ein Kreis mit Mittelpunkt M und beliebigem Radius $r > 0$ (wir wählen aus Anschauungsgründen r kleiner als die Länge der beiden Katheten) schneidet die beiden Katheten in den Punkten W und B.*
- **b)** *Der von Z verschiedene Schnittpunkt der Kreise mit Radius r und Mittelpunkten W und Y ist X.*

2) *Der Punkt X' ist nun der Schnittpunkt des Strahls ZX mit der Hypotenuse des Dreiecks.*

3) *Durch Parallelverschiebung der Seiten XY und WX durch X' erhalten wir als Schnittpunkt mit den Katheten des Dreiecks die Punkte W' und Y'.*

Teilungsverhältnis mit Nebenbedingung

Aufgabe 10. *Konstruiere eine Gerade durch den Punkt A, die die Geraden g und h in Punkten G bzw. H schneidet, sodass $AG : AH = 1 : 5$ gilt.*



1) Wir konstruieren eine Hilfsgerade l durch A, die die Gerade g in G' schneidet.

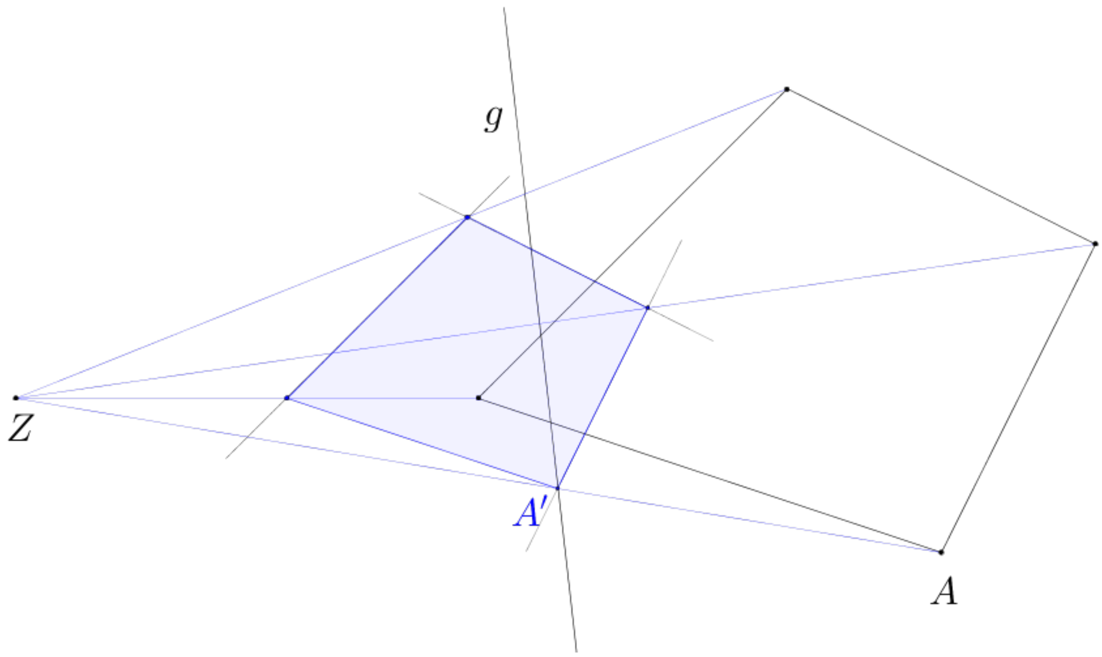
2) Wir tragen die Länge AG' noch vier Mal über G' hinaus auf l auf und nennen den Endpunkt H'. Es gilt: $AH' : AG' = 5 : 1$.

3) Wir nutzen den Strahlensatz: Jeder Punkt auf der Parallelen g' zu g durch H' ist von Punkt A nun 5 Mal so weit entfernt wie der entsprechende Punkt auf g. Der Schnittpunkt von g' mit h ist also der gesuchte Punkt H.

4) Der Schnittpunkt der Strecke AH mit g ist schließlich G.

Viereck zentrisch skalieren mittels Nebenbedingung

Aufgabe 11. *Strecke das Viereck mit Zentrum Z, sodass der Bildpunkt von A auf der Gerade g liegt.*

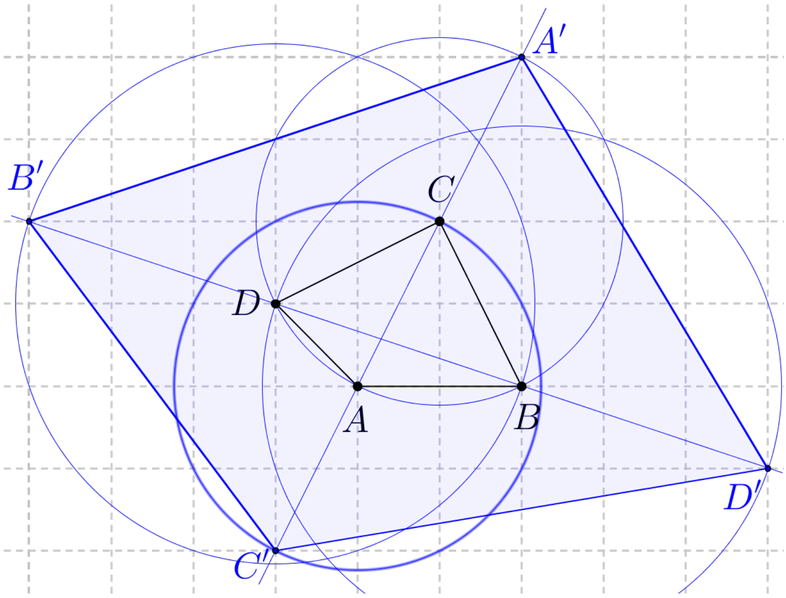


1) *Der Schnittpunkt von ZA mit g ist A'.*

2) *Durch Parallelverschiebung der Vierecksseiten erhalten wir die übrigen drei Eckpunkte als Schnittpunkt mit den Strahlen von Z zu den urspünglichen Eckpunkten des Vierecks.*

Spiegelung der Eckpunkte am gegenüberliegenden Eckpunkt

Aufgabe 12. *Spiegle die Eckpunkte des Vierecks an den jeweiligen gegenüberliegenden Eckpunkten. Wie verhalten sich die Flächeninhalte der neuen Figur und ursprünglichen Figur?*



$(ABCD) = 3{,}5\,\mathrm{FE}$ *und* $(A'B'C'D') = 31{,}5\,\mathrm{FE}$ *(ein Kästchen entspricht einer Flächeneinheit* FE*)*

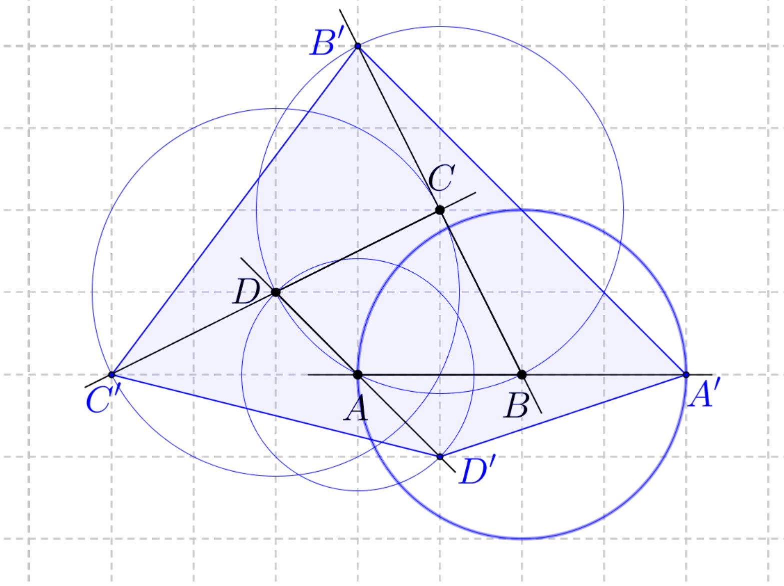
Zur Berechnung der einzelnen Flächen kannst du zum Beispiel den Satz von Pick verwenden.

$(A'B'C'D') : (ABCD) = 9 : 1$

Dies gilt für alle Vierecke, bei denen jeder Innenwinkel kleiner als 180° ist.

Spiegelung der Eckpunkte am benachbarten Eckpunkt

Aufgabe 13. *Spiegle jeden Eckpunkt des Vierecks am benachbarten Eckpunkt im positiven Umlaufsinn (also A an B, B an C usw.).*
Wie verhalten sich die Flächeninhalte der ursprünglichen und neuen Figur zueinander?



$(ABCD) = 3{,}5\,\mathrm{FE}$ *und* $(A'B'C'D') = 17{,}5\,\mathrm{FE}$ *(ein Kästchen entspricht einer Flächeneinheit* FE*)*

Zur Berechnung der einzelnen Flächen kannst du zum Beispiel den Satz von Pick verwenden.

$(A'B'C'D') : (ABCD) = 5 : 1$

Dies gilt für alle Vierecke, bei denen jeder Innenwinkel kleiner als 180° ist.