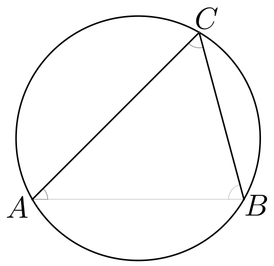
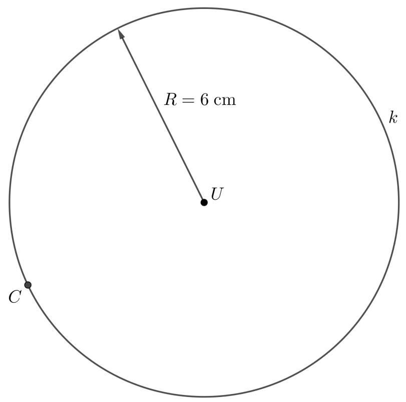
Umkreisradius und zwei Seiten

Aufgabe 1. *Konstruiere ein Dreieck mit* $R = 6\,\text{cm}$, $a = 9\,\text{cm}$ *und* $b = 11\,\text{cm}$.

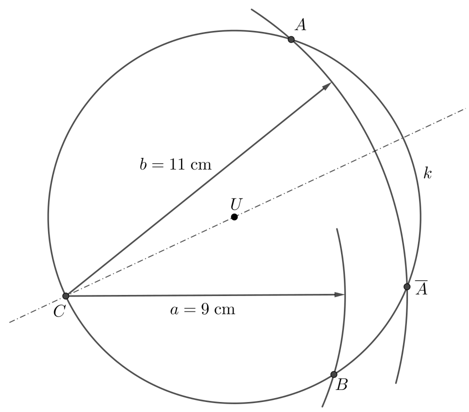


Lösung.

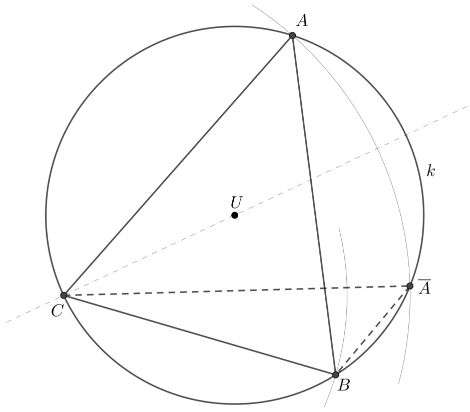
Als ersten Schritt zeichnen wir den Umkreis k mit Mittelpunkt U und dem gegebenen Radius R. Auf k wählen wir einen Eckpunkt C des Dreiecks.



Da der Eckpunkt C der gemeinsame Endpunkt der Seiten a und b ist, können wir nun mit Mittelpunkt C Kreise mit den Radien a und b zeichnen. Diese schneiden k in möglichen Lagen von B bzw. A.



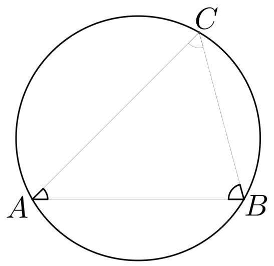
Da wir diese Schnittpunkte entweder auf derselben Seite von CU oder auf verschiedenen Seiten von CU wählen können, erhalten wir zwei mögliche Lösungen ABC und $\overline{A}BC$.



□

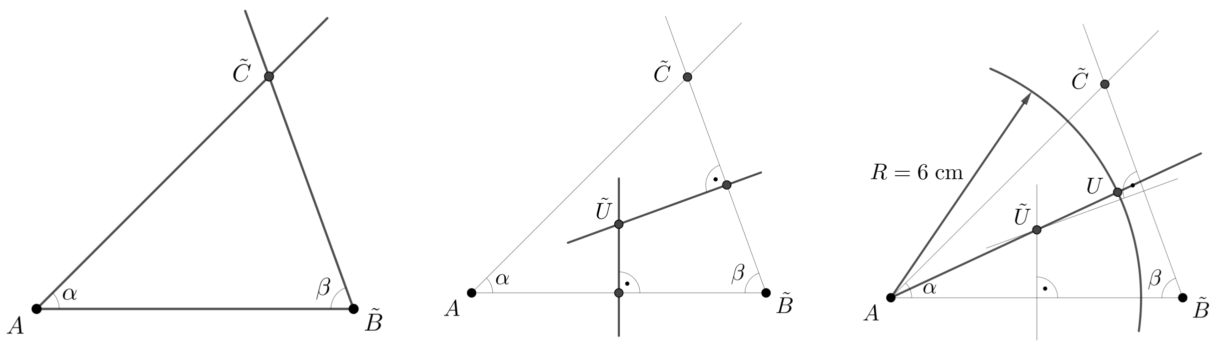
Umkreisradius und zwei Winkel

Aufgabe 2. *Konstruiere ein Dreieck mit* $R = 6\,\text{cm}$, $\alpha = 45°$ *und* $\beta = 70°$.



Lösung. Als ersten Schritt zeichnen wir eine beliebige Strecke, deren Endpunkte wir mit A und $\tilde{B}$ bezeichnen. Tragen wir im Punkt A den Winkel α auf und in $\tilde{B}$ den Winkel β, erhalten wir ein Dreieck $A\tilde{B}\tilde{C}$ mit den gegebenen Innenwinkeln α und β, und einem beliebigen Umkreisradius.

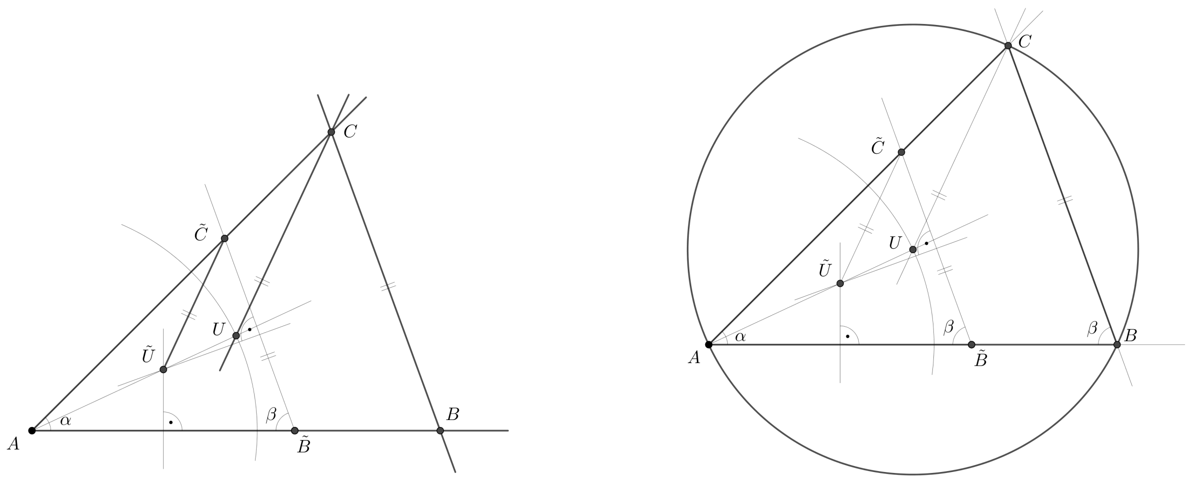
Wir stellen dabei fest, dass das Auftragen von Winkeln nur dann als euklidische Konstruktion aufgefasst werden kann, wenn wir davon ausgehen, dass Winkel der gegebenen Größe bereits graphisch vorhanden sind, und nur mehr kongruent übertragen werden sollen. Von dieser Auffassung gehen wir bei der Angabe von Winkelgrößen im Gradmaß aus (siehe Grundlagenblatt – Winkelkonstruktionen).



Nun konstruieren wir auf übliche Weise den Umkreismittelpunkt $\tilde{U}$ von $A\tilde{B}\tilde{C}$ als Schnittpunkt zweier Seitensymmetralen.

Im nächsten Schritt konstruieren wir den Punkt U auf dem Strahl $A\tilde{U}$ mit $AU = R$.

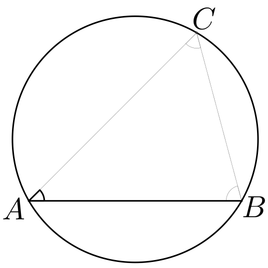
Führen wir eine zentrische Streckung mit Zentrum A durch, die den Punkt $\tilde{U}$ in den Punkt U überführt, wird das Dreieck $A\tilde{B}\tilde{C}$ auf ein ähnliches Dreieck ABC abgebildet, das wie gefordert in A den Innenwinkel α hat, in B den Innenwinkel β, und den Umkreisradius $UA = R$. Zu diesem Zweck nutzen wir die Tatsache aus, dass bei der zentrischen Streckung einerseits B auf dem Strahl $A\tilde{B}$ und C auf dem Strahl $A\tilde{C}$ liegen, andererseits aber auch $\tilde{U}\tilde{C} \parallel UC$ und $\tilde{B}\tilde{C} \parallel BC$ gelten.



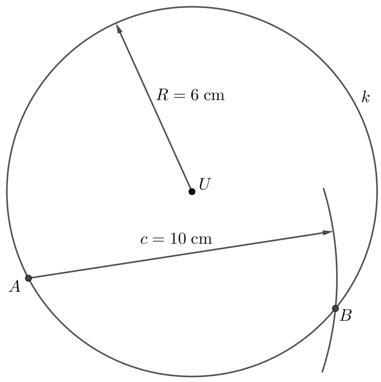
Wir erhalten also das gesuchte Dreieck ABC mit der gegebenen Innenwinkeln α und β sowie dem gegebenen Umkreisradius R. □

Umkreisradius, eine Seite und anliegender Winkel

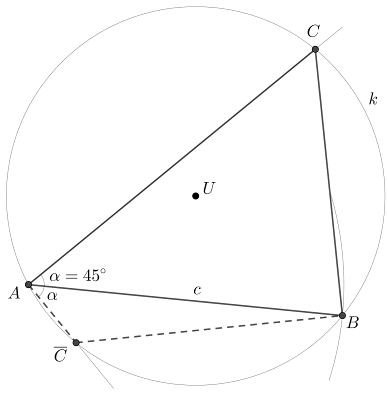
Aufgabe 3. *Konstruiere ein Dreieck mit* $R = 6\,\text{cm}$, $c = 10\,\text{cm}$ *und* $\alpha = 45°$.



Lösung.



Als ersten Schritt zeichnen wir den Umkreis k mit Mittelpunkt U und dem gegebenen Radius R. Auf k wählen wir einen Eckpunkt A des Dreiecks. Da der Eckpunkt A ein Endpunkt der Seite c ist, können wir mit Mittelpunkt A den Kreis mit Radius c zeichnen. Dieser schneidet k in möglichen Lagen von B.



Konstruieren wir nun den Winkel $\alpha = 45°$ mit Scheitel in A und Schenkel AB, so schneidet der zweite Schenkel dieses Winkels k in einer möglichen Lage von C. Da der Winkel in zwei Richtungen aufgetragen werden kann, ergeben sich zwei mögliche Lösungen dieser Aufgabe.

□

Umkreisradius, Seite und gegenüberliegender Winkel

Die Aufgabe, Dreiecke mit den bekannten Bestimmungsstücken R, a und α zu konstruieren hat immer entweder unendlich viele Lösungen oder gar keine.

1.) Erkläre mit dem Peripheriewinkelsatz und nebenstehender Figur, warum diese Behauptung gilt.

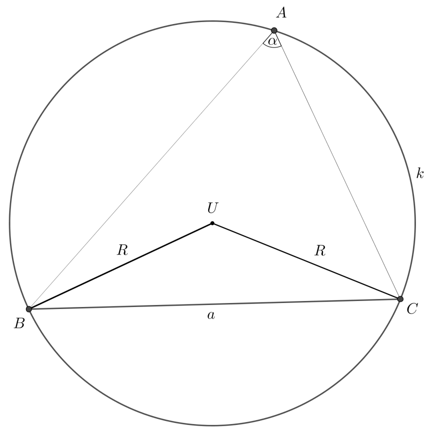
2.) Begründe, warum es bei (i) und (iii) keine Lösung, bei (ii) und (iv) unendlich viele Lösungen gibt:

(i) $R = 6\,\text{cm},\ a = 13\,\text{cm},\ \alpha = 60°$

(ii) $R = 6\,\text{cm},\ a = 12\,\text{cm},\ \alpha = 90°$

(iii) $R = 6\,\text{cm},\ a = 6\,\text{cm},\ \alpha = 45°$

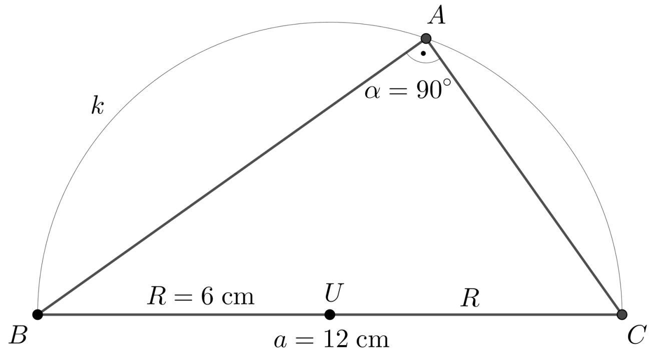
(iv) $R = 6\,\text{cm},\ a = 6\,\text{cm},\ \alpha = 30°$



Die Begründungen befinden sich am Ende dieses Dokuments.

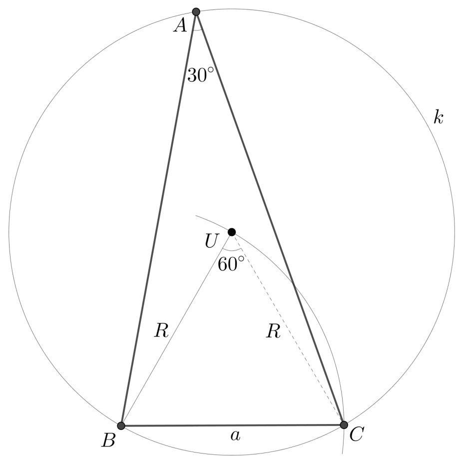
Umkreisradius, Seite und gegenüberliegender Winkel

Aufgabe 4. *Konstruiere eine der unendlich vielen Lösungen für den Fall (ii).*



Umkreisradius, Seite und gegenüberliegender Winkel

Aufgabe 5. *Konstruiere eine der unendlich vielen Lösungen für den Fall (iv).*



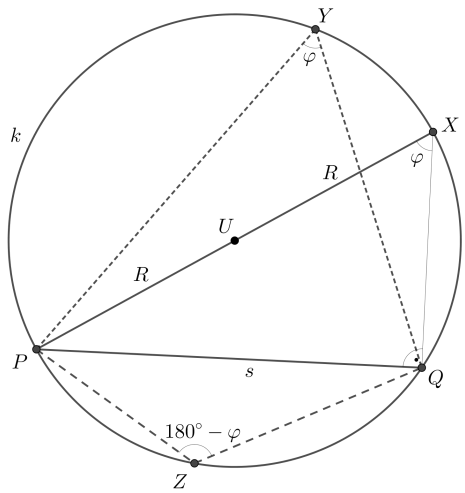
Die Begründung dieser Tatsache gelingt mit Hilfe des Peripheriewinkelsatzes. In einem Kreis mit vorgegebenem Radius R kann es nur (höchstens) zwei mögliche Winkel geben, unter denen eine Sehne des Kreises mit vorgegebener Länge erscheinen kann.

Mehr dazu findest du auf dem Arbeitsblatt – Peripheriewinkelsatz.

Wie in der Figur dargestellt, erscheint die Sehne PQ im Kreis k von allen Punkten des großen Bogens PQ aus (wie zum Beispiel Y) immer unter demselben Winkel φ und von allen Punkten des gegenüberliegenden kleinen Bogens PQ (wie zum Beispiel Z) unter dem dazugehörigen Winkel $180° - \varphi$. Da dies auch für den Punkt X gilt, der mit P einen Durchmesser von k bildet, kann der Wert von φ im rechtwinkeligen Dreieck PQX aus der Beziehung

$$\sin \angle PXQ = \frac{PQ}{PX} \iff \sin \varphi = \frac{s}{2R}$$

berechnet werden. (Im Sonderfall $Q = X$ gilt nach dem Satz von Thales natürlich $\varphi = 180° - \varphi = 90°$.)



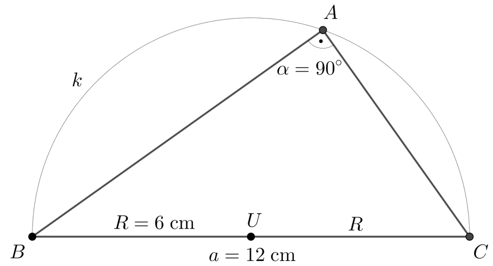
Falls also nach der Vorgabe von R und a der gegenüberliegende Winkel α in Dreieck entweder als der so berechnete Wert φ oder als $180° - \varphi$ gegeben wird, gibt es unendlich viele mögliche Lagen des Eckpunkts A relativ zur Seite $a = BC$, nämlich alle Punkte auf dem entsprechenden Bogen von k. Für alle anderen Werte von α gibt es aber keine Lösung des Problems.

Wir sind jetzt bereit, die vier gegebenen Fälle zu betrachten.

(i): In diesem Fall ist die gegebene Länge der Seite $a = 13\,\text{cm}$ größer als der Durchmesser $2R = 12\,\text{cm}$. Dies ist unmöglich, und es gibt somit keine Lösung.

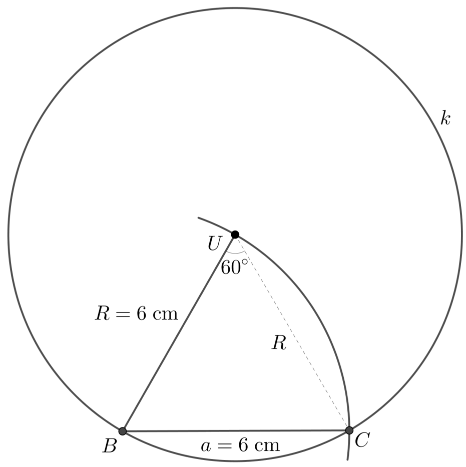
(ii): In diesem Fall ist die gegebene Länge der Seite $a = 12\,\text{cm}$ gleich dem Durchmesser $2R = 12\,\text{cm}$.

Die Seite a des Dreiecks ABC ist somit ein Durchmesser des Umkreises k und der Eckpunkt A kann jeder Punkte des Kreises mit Durchmesser BC mit Ausnahme der beiden Punkte B und C sein. Eine mögliche Lösung ist in nebenstehender Figur dargestellt.



(iii) und (iv): In diesen Fällen erhalten wir aus der Beziehung $\sin\alpha = \frac{a}{2R} = \frac{6}{2\cdot 6} = \frac{1}{2}$ den möglichen Winkel $\alpha = 30°$ (bzw. $180° - 30° = 150°$). Es ist also offensichtlich, dass der Fall (iii) mit $\alpha = 45°$ keine Lösung zulässt, während es im Fall (iv) unendlich viele mögliche Lagen von A auf dem entsprechenden Bogen des Kreises k mit Radius R gibt.

Wie man in nebenstehender Figur sieht, konstruieren wir zuerst den Kreis k mit Radius R und Mittelpunkt U, sowie den Punkt B auf k beliebig. Da $a = R = 6\,\text{cm}$ gilt, erhalten wir den Punkt C als Schnittpunkt von k mit dem Kreis mit Mittelpunkt B durch U. Alle Seiten des Dreiecks UBC haben nun dieselbe Länge 6 cm, und das Dreieck UBC ist somit gleichseitig.



Das bedeutet, dass der Zentriwinkel $\angle BUC$ der Sehne BC im Kreis k den Wert $60°$ hat, womit der Peripheriewinkel über diese Sehne den Wert $\frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$ annimmt. Wir können also als A jeden beliebigen Punkt des großen Bogens BC von k wählen um eine Lösung der Aufgabe zu erhalten.