Auf diesem Konstruktionsblatt beschäftigen wir uns mit Dreieckskonstruktionen, die *unterschiedlich viele Lösungen* zulassen, je nachdem welche konkreten Zahlen für die auftretenden Bestimmungsstücke vorgegeben werden.

Im KH – Geometrische Konstruktionen findest du die Grundlagen zu geometrischen Konstruktionen.

Zwei Seiten eines gleichschenkeligen Dreiecks

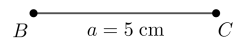
Aufgabe 1. *Wir möchten gleichschenkelige Dreiecke mit $a = 5\,\text{cm}$ konstruieren. Für die Seite b gilt:*

$$\textit{1)}\ b = 4\,\text{cm} \qquad \textit{2)}\ b = 2\,\text{cm}$$

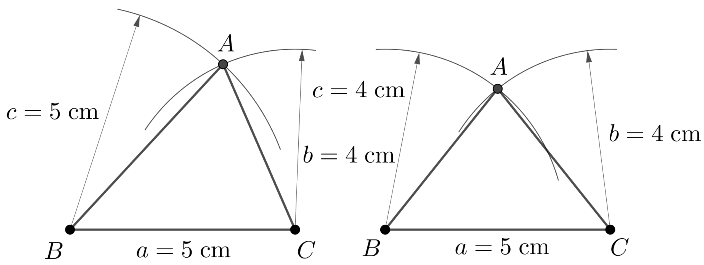
Wie viele verschiedene (d.h. nicht kongruente) Lösungen erwartest du in den beiden Fällen jeweils? Warum?

Lösung.

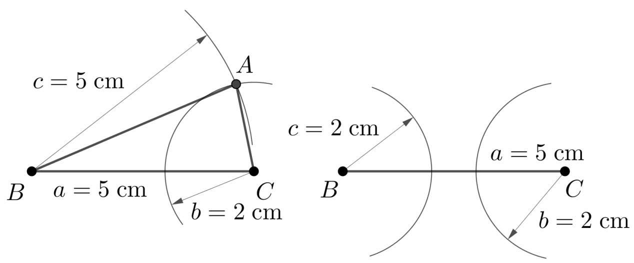
Als ersten Schritt zeichnen wir in beiden Fällen eine Strecke BC mit der Länge $a = 5\,\text{cm}$.



Im Fall **1)** ergeben sich nun zwei verschiedene Lösungen, da entweder $c = a$ oder $c = b$ gelten kann. In beiden Fällen kann die Lösung jeweils konstruiert werden, indem der fehlende Eckpunkt A als Schnittpunkt der Kreise mit den Radien b bzw. c und den Mittelpunkten C bzw. B bestimmt wird.



Im Fall **2)** gibt es aber nur eine Lösung. Zunächst mag es so scheinen, als gäbe es auch in diesem Fall zwei Lösungen, da wir ja auch in diesem Fall entweder $c = a$ oder $c = b$ annehmen dürfen. Wie in der Figur zu sehen, schneiden sich aber die beiden Konstruktionskreise unter der Annahme $c = b$ in diesem Fall aber nicht.



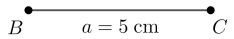
Dies folgt auch unmittelbar aus der Dreiecksungleichung. In jedem Dreieck muss die Summe der Längen zweier Seiten größer sein als die Länge der dritten Seite, und dies muss insbesondere für die Summe der beiden kürzeren Seiten gelten. (Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass eine Strecke die kürzeste Verbindung zweier Punkte ist. Die Strecke $a = BC$ muss als kürzeste Verbindung von B nach C der Länge nach kleiner als die Summe der Strecken $c + b = BA + AC$ sein, da dies eine Verbindung von B nach C über den Umweg A darstellt.) In diesem Fall hat die Aufgabe daher nur eine einzige Lösung. □

Zwei Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks

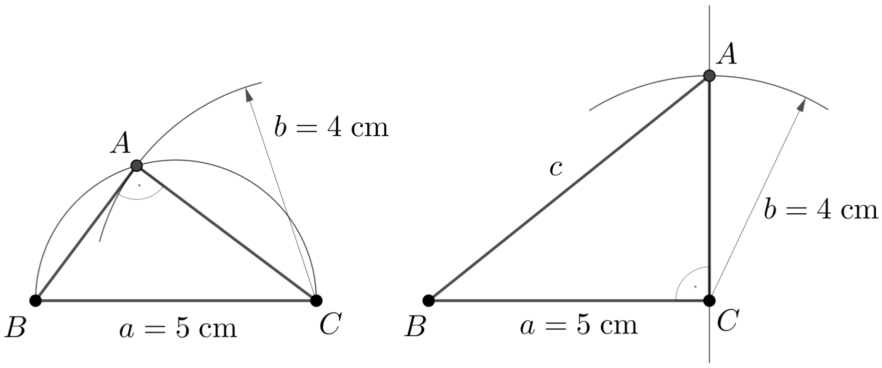
Aufgabe 2. *Wir möchten rechtwinkelige Dreiecke mit $a = 5\,\text{cm}$ und $b = 4\,\text{cm}$ konstruieren. Wie viele verschiedene (d.h. nicht kongruente) Lösungen hat diese Aufgabe?*

Lösung.

Als ersten Schritt zeichnen wir wie in Aufgabe 1 eine Strecke BC mit der Länge $a = 5\,\text{cm}$.



Nun erinnern wir uns an die Tatsache, dass die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks die längste Seite des Dreiecks ist. Somit kann b nicht die Hypotenuse des Dreiecks sein, da $a > b$ gilt. Wir können aber sowohl annehmen, dass a die Hypotenuse ist, als auch, dass c die Hypotenuse ist. Die Konstruktionen sind für beide Fälle in folgender Figur ausgeführt.



Ist, wie in der linken Konstruktion dargestellt, a die Hypotenuse, erhalten wir den Eckpunkt A als Schnittpunkt des Thaleskreises über die Strecke BC mit dem Kreis mit Radius $b = 4\,\text{cm}$ cm und Mittelpunkt C.
Ist, wie rechts dargestellt, c die Hypotenuse, erhalten wir den Eckpunkt A als Schnittpunkt der Normalen zu BC durch C mit dem Kreis mit Radius $b = 4$ cm und Mittelpunkt C.
Wir erkennen, dass es zwei Lösungen dieser Konstruktionsaufgabe gibt. □

Zwei Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks

Aufgabe 3. *Wie kann man zwei Seitenlängen in Aufgabe 2 so wählen, dass die Aufgabe nur eine einzige Lösung besitzt?*

Lösung.
Wir betrachten nochmals die beiden Konstruktionen von Aufgabe 2. Die rechts dargestellte Konstruktion ist immer möglich, unabhängig von den gegebenen Längen der Dreiecksseiten. Die linke Konstruktion versagt allerdings, wenn $a = b$ gilt. In diesem Fall fällt der Punkt A mit dem Punkt B zusammen, und wir erhalten aus der Konstruktion kein Dreieck.
Die Annahme eines *gleichschenkelig rechtwinkeligen* Dreiecks, zum Beispiel mit $a = b = 5\,\text{cm}$, führt also dazu, dass die Konstruktionsaufgabe nur eine einzige Lösung besitzt. □

Seite und Höhe eines gleichschenkeligen Dreiecks

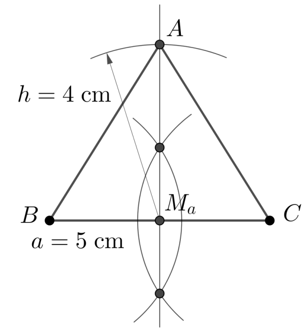
Aufgabe 4. *Wir möchten gleichschenkelige Dreiecke mit einer Seitenlänge* $a = 5\,\text{cm}$ *konstruieren, bei denen eine der Höhen* $h = 4\,\text{cm}$ *ist.*
Wie viele verschiedene (d.h. nicht kongruente) Lösungen hat diese Aufgabe?

Hinweis: Unterschiedliche Paare von Seiten können gleich lang sein und die Höhe h kann auf eine beliebige Seite normal stehen. Beachte auch Symmetrien!

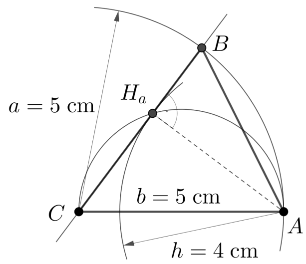
Lösung.
Bis auf Symmetrien können wir in dieser Aufgabe vier Fälle betrachten:
i) $b = c,\ h \perp a$, **ii)** $a = b,\ h \perp a$, **iii)** $b = c,\ h \perp c$, und **iv)** $a = b,\ h \perp c$.

Bei den vorgegebenen Längen führen die vier möglichen Annahmen zu vier verschiedenen Lösungen.

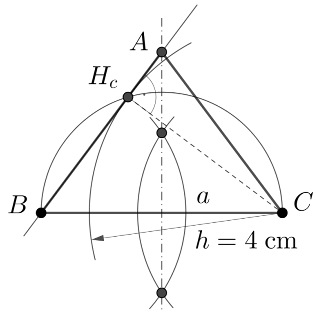
Im Fall i) zeichnen wir zuerst die Strecke $BC = a = 5\,\text{cm}$. Der Eckpunkt A liegt dann auf der Streckensymmetrale von BC, im Abstand h vom Mittelpunkt M_a von BC. Wir erhalten A also als Schnittpunkt der Streckensymmetrale von BC mit dem Kreis mit Mittelpunkt M_a und Radius $h = 4\,\text{cm}$.



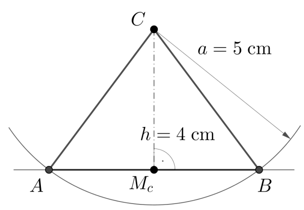
Im Fall ii) zeichnen wir zuerst die Strecke $CA = b = a = 5\,\text{cm}$. Der Höhenfußpunkt H_a von h auf BC liegt dann auf dem Thaleskreis über die Strecke CA, und wir erhalten H_a als Schnittpunkt dieses Thaleskreises mit dem Kreis mit Mittelpunkt A und Radius $h = 4\,\text{cm}$. Den Eckpunkt B erhalten wir dann schließlich als Schnittpunkt der Geraden CH_a mit dem Kreis mit Mittelpunkt C und Radius $a = 5\,\text{cm}$.



Im Fall iii) zeichnen wir zuerst die Strecke $BC = a = 5\,\text{cm}$. Der Höhenfußpunkt H_c von h auf AB liegt dann auf dem Thaleskreis über die Strecke BC, und wir erhalten H_c als Schnittpunkt dieses Thaleskreises mit dem Kreis mit Mittelpunkt C und Radius $h = 4\,\text{cm}$. Den Eckpunkt A erhalten wir dann schließlich als Schnittpunkt der Geraden BH_c mit der Streckensymmetrale von BC.



Im Fall iv) schließlich zeichnen wir zuerst die Strecke $CM_c = h = 4\,\text{cm}$. Die Eckpunkte A und B erhalten wir dann als die Schnittpunkte der Normalen zu CM_c durch M_c mit dem Kreis mit Mittelpunkt C und Radius $a = b = 5\,\text{cm}$.



□

Seite und Höhe eines gleichschenkeligen Dreiecks

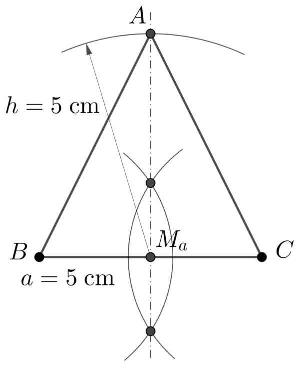
Aufgabe 5. *Wie in Aufgabe 4 möchten wir gleichschenkelige Dreiecke mit gegebener Seitenlänge a und Höhe h konstruieren. Wie viele verschiedene (d.h nicht kongruente) Lösungen gibt es, falls*

$$\textit{1)}\ a = 5\,\text{cm} \ \textit{ und } h = 5\,\text{cm} \qquad \textit{2)}\ a = 4\,\text{cm} \ \textit{ und } h = 5\,\text{cm}$$

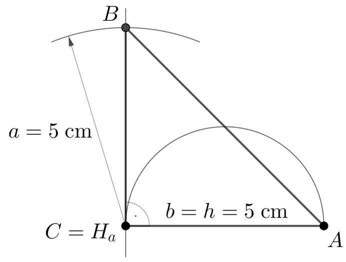
gegeben sind?

Lösung.
Wie in Aufgabe 4 betrachten wir die folgenden vier Fälle:
i) $b = c$, $h \perp a$, **ii)** $a = b$, $h \perp a$, **iii)** $b = c$, $h \perp c$, und **iv)** $a = b$, $h \perp c$.
Bei Angabe **1)** erhalten wir nur in zwei Fällen eine Lösung.

Im Fall i) gehen wir ebenso vor wie in Aufgabe 4.



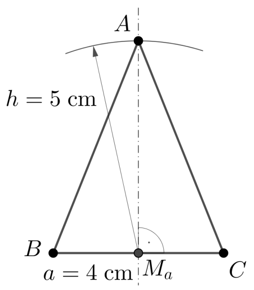
Dasselbe gilt auch für den Fall ii). Aufgrund der Tatsache, dass C und H_a für diese Angabe identisch sind, fallen die Höhe h und die Seite b zusammen.



In den restlichen Fällen iii) und iv) gibt es keine Lösung. In beiden Fällen fallen die Höhenfußpunkte H_c (bzw. M_c, was in diesem Fall dasselbe ist) mit dem Eckpunkt B zusammen, wonach sich kein Dreieck ABC ergibt.

Bei Angabe **2)** gibt es sogar nur eine einzige Lösung.

Wieder kann im Fall i) wie bisher vorgegangen werden.



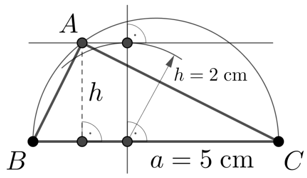
In den übrigen Fällen ergeben sich im Laufe der Konstruktion keine Schnittpunkte H_a bzw. H_c (oder M_c), und somit auch keine weiteren Dreiecke mit den vorgegebenen Maßen. □

Seite und Höhe eines rechtwinkeligen Dreiecks

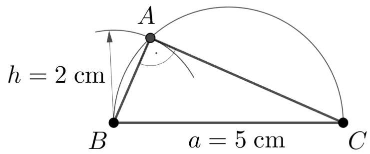
Aufgabe 6. *Wir möchten rechtwinkelige Dreiecke mit einer Seitenlänge $a = 5\,\mathrm{cm}$ konstruieren, bei denen eine der Höhen $h = 2\,\mathrm{cm}$ ist.*
Wie viele verschiedene (d.h. nicht kongruente) Lösungen hat diese Aufgabe?

Lösung.
Bis auf Symmetrien können wir in dieser Aufgabe vier Fälle betrachten:
i) $b \perp c$, $h \perp a$, **ii)** $b \perp c$, $h \perp b$, **iii)** $a \perp b$, $h \perp c$, und **iv)** $a \perp b$, $h \perp a$.
Bei dieser Angabe führen die vier möglichen Annahmen zu vier verschiedenen Lösungen.

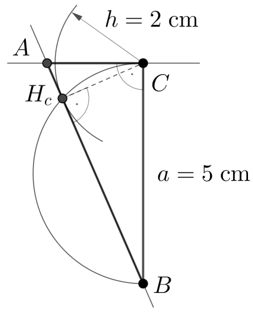
Im Fall i) zeichnen wir zuerst die Strecke $BC = a = 5\,\mathrm{cm}$. Der Eckpunkt A liegt dann auf dem Thaleskreis auf der Strecke BC, im Normalabstand h von BC. Wir erhalten A also als Schnittpunkt des Thaleskreises auf BC mit der Parallelen zu BC im Abstand $h = 2\,\mathrm{cm}$, die wir als Normale zur Normalen in einem beliebigen Punkt von BC konstruieren.



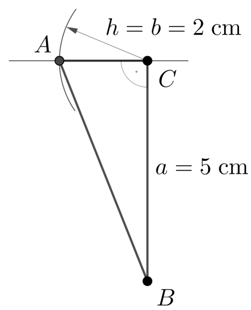
Im Fall ii) gilt aufgrund der rechten Winkel sicher $h = c$. Wir zeichnen also zuerst die Strecke $BC = a = 5\,\mathrm{cm}$. Der Punkt A liegt dann auf dem Thaleskreis über die Strecke BC, und wir erhalten A als Schnittpunkt dieses Thaleskreises mit dem Kreis mit Mittelpunkt B und Radius $h = 2\,\mathrm{cm}$.



Im Fall iii) zeichnen wir zuerst die Strecke $BC = a = 5\,\mathrm{cm}$. Der Höhenfußpunkt H_c von h auf AB liegt dann auf dem Thaleskreis über die Strecke BC, und wir erhalten H_c als Schnittpunkt dieses Thaleskreises mit dem Kreis mit Mittelpunkt C und Radius $h = 2\,\mathrm{cm}$. Den Eckpunkt A erhalten wir dann schließlich als Schnittpunkt der Geraden BH_c mit der Normalen zu BC durch C.



Im Fall iv) schließlich, folgt aus der Rechtwinkeleigenschaft sicher $h = b$. Wir zeichnen also zuerst die Strecke $BC = a = 5\,\mathrm{cm}$. Den Eckpunkt C erhalten wir dann als den Schnittpunkt der Normalen zu BC durch C mit dem Kreis mit Mittelpunkt C und Radius $b = h = 2\,\mathrm{cm}$.



□

Seite und Höhe eines rechtwinkeligen Dreiecks

Aufgabe 7. *Wie in Aufgabe 6 möchten wir rechtwinkelige Dreiecke mit einer Seitenlänge* $a = 5\,\text{cm}$ *konstruieren, wobei eine der Höhen*

$$\textit{1)}\ h = 3\,\text{cm} \qquad \textit{2)}\ h = 6\,\text{cm}$$

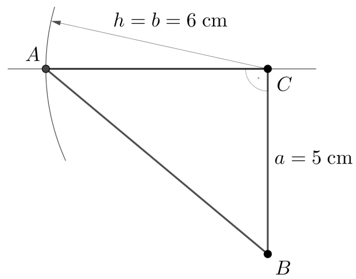
ist. Wie viele verschiedene Lösungen erwartest du in den beiden Fällen jeweils? Warum?

Lösung.
Wir können wiederum die vier Fälle von Aufgabe 6 betrachten:
i) $b \perp c$, $h \perp a$, **ii)** $b \perp c$, $h \perp b$, **iii)** $a \perp b$, $h \perp c$, und **iv)** $a \perp b$, $h \perp a$. Bei Angabe **1)**

erhalten wir nur in drei Fällen eine Lösung.
Im Fall i) ergibt sich keine Lösung, da die Parallele zu BC im Abstand $h = 3\,\text{cm}$ den Thaleskreis mit dem Radius 2,5 cm nicht schneidet. Die übrigen drei Fälle verlaufen aber vollkommen analog zu Aufgabe 6.

Bei Angabe **2)** gibt es nur eine einzige Lösung.

Wieder kann im Fall iv) wie in Aufgabe 6 vorgegangen werden.



In den übrigen Fällen ergeben sich im Laufe der Konstruktion keine Schnittpunkte mit den jeweiligen Thaleskreisen, und somit auch keine weiteren Dreiecke mit den vorgegebenen Maßen. □