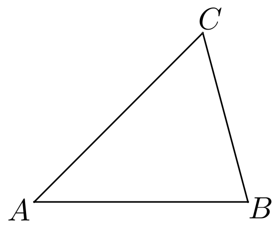
Drei Seitenlängen

Aufgabe 1. *Konstruiere ein Dreieck mit $a = 6\,\text{cm}$, $b = 7\,\text{cm}$ und $c = 8\,\text{cm}$.*

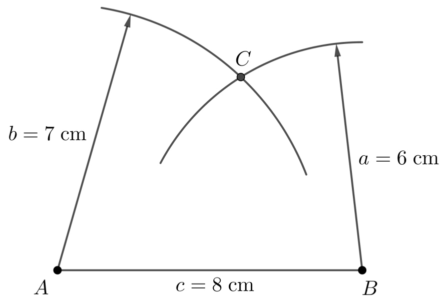


1) Konstruiere eine Strecke AB mit der Länge $c = 8\,\text{cm}$.

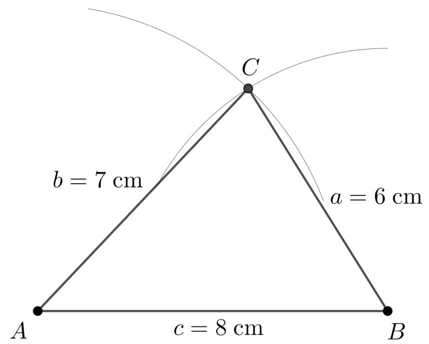
2) Konstruiere einen Kreis mit Mittelpunkt A und Radius $b = 7\,\text{cm}$.

3) Konstruiere einen Kreis mit Mittelpunkt B und Radius $a = 6\,\text{cm}$.

4) Der Eckpunkt C des Dreiecks ist ein Schnittpunkt der Kreise.



Es gibt zwei Möglichkeiten für diesen Schnittpunkt C (oberhalb und unterhalb von AB). Die beiden zugehörigen Dreiecke sind kongruent.

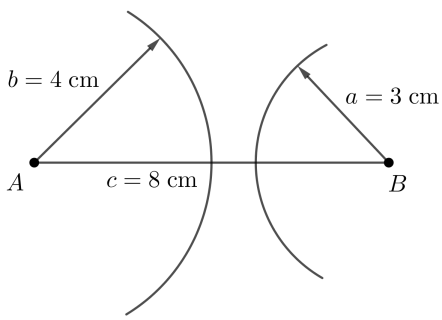


Drei Seitenlängen

Aufgabe 2. *Begründe, warum es kein Dreieck mit den Seitenlängen $a = 3\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$ und $c = 8\,\text{cm}$ geben kann.*

Mit $a = 3\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$ und $c = 8\,\text{cm}$ gilt $a + b \leq c$, im Widerspruch zur Dreiecksungleichung $a + b > c$, die in jedem Dreieck gelten muss. Es kann also in diesem Fall keine Lösung geben.

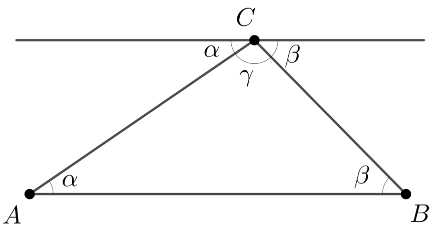
Versuchen wir die Konstruktion von Aufgabe 1 mit den hier gegebenen Zahlen nachzuvollziehen, bemerken wir, dass sich die beiden Kreise mit Mittelpunkten in A bzw. B nicht schneiden. Wir erhalten also keinen Punkt C.



Drei Winkel

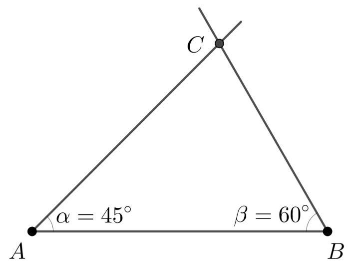
Aufgabe 3. *Begründe, warum es kein Dreieck mit den Winkeln* $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$ *und* $\gamma = 70°$ *geben kann.*

Für jedes Dreieck gilt: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$
Aber: $45° + 60° + 70° = 175° \neq 180°$



Konstruiere ein Dreieck mit den Winkeln $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$ *und* $\gamma = 75°$*.*
Begründe, warum es unendlich viele Dreiecke mit diesen Winkeln gibt, die paarweise nicht kongruent sind.

1) *Konstruiere eine Strecke* AB *mit beliebiger Länge.*
2) *Konstruiere einen Winkel mit Scheitel* A *und Größe* $\alpha = 45°$*.*
3) *Konstruiere einen Winkel mit Scheitel* B *und Größe* $\alpha = 60°$*.*
4) *Die beiden Winkelschenkel schneiden einander im Punkt* C*.*



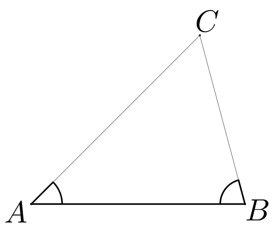
Wegen der Winkelsumme in Dreiecken gilt:

$$\angle ACB = 180° - 45° - 60° = 75° = \gamma$$

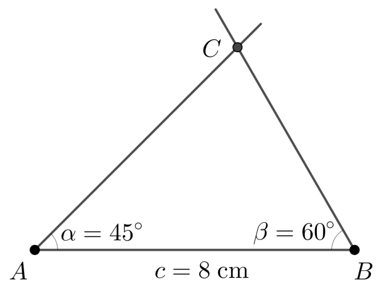
Da die Länge der Strecke AB *beliebig gewählt werden kann, gibt es unendlich viele solcher Dreiecke, die nicht kongruent sind.*

Eine Seite und zwei Winkel

Aufgabe 4. *Konstruiere ein Dreieck mit* $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$ *und* $c = 8\,\text{cm}$*.*

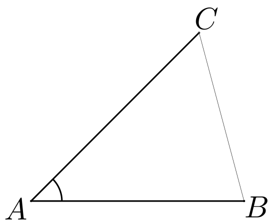


Die Konstruktion verläuft genau wie die in Aufgabe 3, mit Ausnahme der Vorgabe der Länge von AB*.*



Zwei Seiten und eingeschlossener Winkel

Aufgabe 5. *Konstruiere ein Dreieck mit* $\alpha = 45°$, $b = 5\,\text{cm}$ *und* $c = 8\,\text{cm}$.

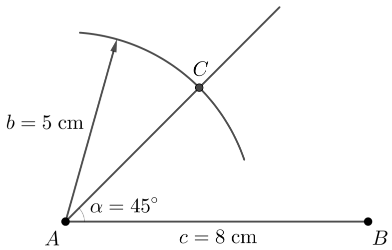


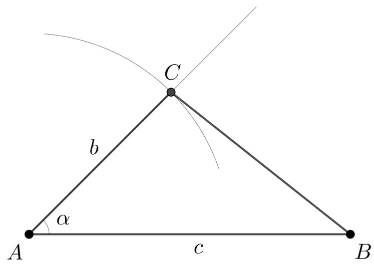
1) Konstruiere eine Strecke AB *der Länge* $c = 8\,\text{cm}$.

2) Konstruiere einen Winkel mit Scheitel A *und Größe* $\alpha = 45°$.

3) Schlage von A *aus auf dem konstruierten Schenkel eine Strecke der Länge* $b = 5\,\text{cm}$ *ab.*

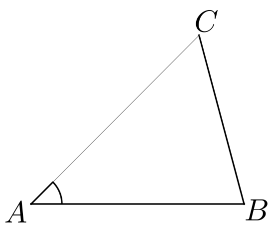
4) Verbinde den damit erhaltenen Punkt C *mit* B.





Zwei Seiten und nicht-eingeschlossener Winkel

Aufgabe 6. *Konstruiere ein Dreieck mit* $\alpha = 45°$, $a = 6\,\text{cm}$ *und* $c = 5\,\text{cm}$.

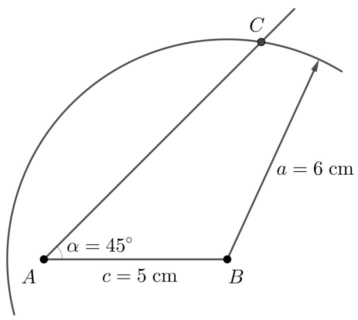


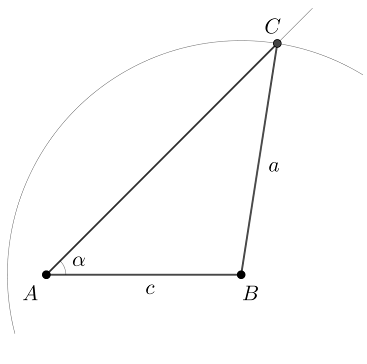
1) Konstruiere eine Strecke AB *der Länge* $c = 8\,\text{cm}$.

2) Konstruiere einen Winkel mit Scheitel A *und Größe* $\alpha = 45°$.

3) Schlage von B *aus eine Strecke der Länge* $a = 6\,\text{cm}$ *ab.*
Da a *länger als* c *ist, gibt es genau einen Schnittpunkt* C *mit dem konstruierten Schenkel. (SSW)*

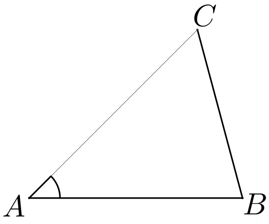
4) Verbinde den damit erhaltenen Punkt C *mit* B.





Zwei Seiten und nicht-eingeschlossener Winkel

Aufgabe 7. *Konstruiere zwei Dreiecke mit $\alpha = 45°$, $a = 8\,\text{cm}$ und $c = 10\,\text{cm}$, die nicht kongruent sind.*

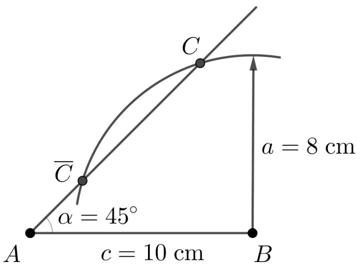


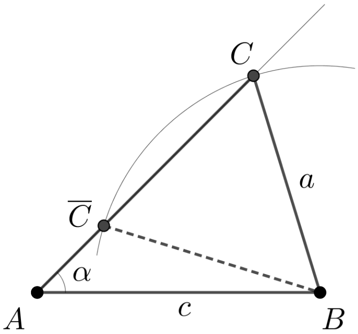
1) *Konstruiere eine Strecke AB der Länge $c = 10\,\text{cm}$.*

2) *Konstruiere einen Winkel mit Scheitel A und Größe $\alpha = 45°$.*

3) *Schlage von B aus eine Strecke der Länge $a = 8\,\text{cm}$ ab.*
Es gibt genau zwei Schnittpunkte C und $\bar{C}$ mit dem konstruierten Schenkel. Das liegt daran, dass a kürzer als c ist, aber länger als der Normalabstand von B zum Schenkel von α.

4) *Verbinde den damit erhaltenen Punkt C mit B.*





Zwei Seiten und nicht-eingeschlossener Winkel

Aufgabe 8. *Wir möchten Dreiecke mit* $\alpha = 30°$ *und* $c = 6\,\text{cm}$ *konstruieren.*
Für die Seite a gilt: ***a)*** $a = 7\,\text{cm}$ ***b)*** $a = 4\,\text{cm}$ ***c)*** $a = 3\,\text{cm}$ ***d)*** $a = 2\,\text{cm}$
Wie viele Lösungen erwartest du in den vier Fälle jeweils? Warum?

a) *Der gegebene Winkel liegt in diesem Fall der längeren gegebenen Seite gegenüber. Deshalb gibt es wie in Aufgabe 6 eine eindeutig Lösung.*

b) *Der gegebene Winkel liegt in diesem Fall der kürzeren gegebenen Seite gegenüber. Wie in Aufgabe 7 ist diese kürzere Seite aber lang genug, dass es zwei verschiedene Lösungen gibt.*

c) *Der gegebene Winkel liegt in diesem Fall der kürzeren gegebenen Seite gegenüber. Die Länge dieser kürzeren Seite ist genau der Normalabstand vom Eckpunkt B zum zweiten Schenkel von* α*, nämlich* $a = c \cdot \sin(30°)$*. Bei der Konstruktion berührt der Kreis mit Mittelpunkt B und Radius a genau den zweiten Schenkel des Winkels* α*, und wir erhalten damit eine eindeutige Lösung der Aufgabe.*

d) *Der gegebene Winkel liegt in diesem Fall der kürzeren gegebenen Seite gegenüber. Die Länge dieser kürzeren Seite ist kürzer als der Normalabstand vom Eckpunkt B zum zweiten Schenkel von* α*. Es gibt also keine Lösung.*