

KOMPETENZHEFT – DIFFERENTIALRECHNUNG

INHALTSVERZEICHNIS

1. Mittlere Änderungsrate	2
2. Lokale Änderungsrate	4
3. Ableitungsregeln	9
4. Kurvenuntersuchungen	13
5. Steigungswinkel und Schnittwinkel	17
6. Umgekehrte Kurvenuntersuchungen	20
7. Physikalische Anwendungsaufgaben	21
8. Optimierungsaufgaben	26
9. Mittelwertsatz der Differentialrechnung	27
10. Newtonsches Näherungsverfahren	29



Kompetenzmaterialien – Differentialrechnung



In diesem Kompetenzheft wird ein möglicher Einstieg ins Thema „Differentialrechnung“ vorgestellt.

Die mit ★ markierten Inhalte sind für besonders interessierte Personen gedacht.

Die folgenden **Materialien** sind für den Einsatz im Unterricht konzipiert:

- ✓ **Arbeitsblatt – Steigungsmessung von Geraden (Ausarbeitung)**
- ✓ **Arbeitsblatt – Differentialquotient (Ausarbeitung)**
- ✓ **Arbeitsblatt – Ableitungsregeln (Ausarbeitung)**
- ✓ **Arbeitsblatt – Kurvenuntersuchungen I (Ausarbeitung)**
- ✓ **Arbeitsblatt – Kurvenuntersuchungen II (Ausarbeitung)**
- ✓ **Technologieblatt – Kurvenuntersuchungen (Ausarbeitung)**
- ✓ **Technologieblatt – Umgekehrte Kurvenuntersuchungen (Ausarbeitung)**
- ✓ **Arbeitsblatt – Optimierungsaufgaben (Ausarbeitung) (Ausarbeitung)**
- ✓ **Arbeitsblatt – Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Ausarbeitung)**
- ✓ **Arbeitsblatt – Newtonsches Näherungsverfahren (Ausarbeitung)**

In der **Aufgabensammlung – Differentialrechnung** befinden sich passende Übungsaufgaben.

Wir freuen uns über Feedback an mmf@univie.ac.at.

1. MITTLERE ÄNDERUNGSRATE

Beispiel 1.1. Die Höhe einer Sonnenblume wird täglich gemessen und aufgezeichnet.

$t \dots$ Zeit in Tagen ($t = 0$ ist der Tag, an dem die Sonnenblume keimt.)

$h(t) \dots$ Höhe in cm an Tag t

Es gilt $h(30) = 70$ cm und $h(50) = 150$ cm.

- 1) Um wie viel cm ist die Sonnenblume an Tag 50 höher als an Tag 30?
- 2) Um wie viel Prozent ist die Sonnenblume an Tag 50 höher als an Tag 30?
- 3) Um wie viel cm ist die Sonnenblume von Tag 30 bis Tag 50 täglich *durchschnittlich* gewachsen?

Lösung.

1) $h(50) - h(30) = 80$ cm. An Tag 50 ist die Sonnenblume um 80 cm höher als an Tag 30.

2) Lösungsweg 1: $\frac{h(50)}{h(30)} = \frac{150}{70} = 2,142\dots = 214,2\dots \%$

Lösungsweg 2: $\frac{h(50) - h(30)}{h(30)} = \frac{80}{70} = 1,142\dots = 114,2\dots \%$

An Tag 50 ist die Sonnenblume *um* 114,2... % höher als an Tag 30.

3) $\frac{h(50) - h(30)}{50 - 30} = \frac{80}{20} = 4$

Von Tag 30 bis Tag 50 ist die Sonnenblume *durchschnittlich* um 4 cm pro Tag gewachsen. □

Änderungsmaße



Eine Funktion f ist auf dem Intervall $[a; b]$ definiert.

1) **Absolute Änderung** von f in $[a; b]$: $f(b) - f(a)$

2) **Relative Änderung** von f in $[a; b]$: $\frac{f(b) - f(a)}{f(a)}$ mit $f(a) \neq 0$

3) **Mittlere Änderungsrate** von f in $[a; b]$: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ mit $a < b$

Beispiel 1.2. Die Fahrt einer U-Bahn zwischen zwei Stationen dauert 70 Sekunden.

Der Fahrtverlauf wird näherungsweise durch eine Weg-Zeit-Funktion s beschrieben:

$$s(t) = -\frac{2}{245} \cdot t^3 + \frac{6}{7} \cdot t^2 \quad \begin{array}{l} t \dots \text{Zeit in Sekunden, } 0 \leq t \leq 70 \\ s(t) \dots \text{zurückgelegter Weg zur Zeit } t \text{ in Metern} \end{array}$$

- Berechne die Streckenlänge zwischen den Stationen.
- Berechne die mittlere Änderungsrate von s in $[20; 50]$, und interpretiere sie im Kontext.

Die zugehörige Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v hat die folgende Gleichung:

$$v(t) = -\frac{6}{245} \cdot t^2 + \frac{12}{7} \cdot t \quad \begin{array}{l} t \dots \text{Zeit in Sekunden, } 0 \leq t \leq 70 \\ v(t) \dots \text{Geschwindigkeit zur Zeit } t \text{ in m/s} \end{array}$$

- Berechne die Geschwindigkeit der U-Bahn nach 20 Sekunden.
- Berechne die mittlere Geschwindigkeit der U-Bahn in den Zeiträumen
 1) $[20; 30]$, 2) $[20; 21]$, 3) $[20; 20,1]$, 4) $[20; 20,01]$.
 (Vergleiche die Werte mit c). Was fällt dir auf?)
- Berechne die mittlere Änderungsrate von v in $[10; 30]$ und interpretiere sie im Kontext.

Lösung.

- Es ist $s(70) = 1400$ m und $s(0) = 0$ m.

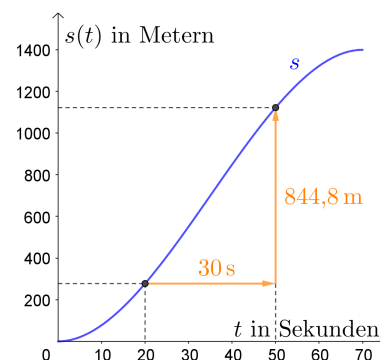
Die U-Bahn legt zwischen den beiden Stationen also 1400 m zurück.

- Die mittlere Änderungsrate von s in $[20; 50]$ ist

$$\frac{s(50) - s(20)}{50 - 20} = \frac{1122,4... - 277,5...}{50 - 20} = \frac{844,8... \text{ m}}{30 \text{ s}} = 28,16... \text{ m/s.}$$

Im Zeitraum $[20; 50]$ legt die U-Bahn pro Sekunde *durchschnittlich* 28,16... m zurück.

Oder: Die *mittlere* Geschwindigkeit der U-Bahn im Zeitraum $[20; 50]$ ist 28,16... m/s.



- Nach 20 Sekunden fährt die U-Bahn mit der Geschwindigkeit $v(20) = 24,48... \text{ m/s}$.
- Die gesuchten mittleren Geschwindigkeiten sind

$$1) \frac{s(30) - s(20)}{30 - 20} = 27,34... \text{ m/s}, \quad 2) 24,84... \text{ m/s}, \quad 3) 24,52... \text{ m/s}, \quad 4) 24,49... \text{ m/s.}$$

- Die mittlere Änderungsrate von v in $[10; 30]$ ist

$$\frac{v(30) - v(10)}{30 - 10} = \frac{14,69... \text{ m/s}}{20 \text{ s}} = 0,734... \text{ m/s}^2.$$

Im Zeitraum $[10; 30]$ steigt die Geschwindigkeit der U-Bahn pro Sekunde *durchschnittlich* um 0,734... m/s.

Oder: Die *mittlere* Beschleunigung der U-Bahn im Zeitraum $[10; 30]$ ist 0,734... m/s². □

2. LOKALE ÄNDERUNGSRATE

Arbeitsblatt – Steigungsmessung von Geraden



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

An dieser Stelle bietet sich zur Wiederholung das [Arbeitsblatt – Steigungsmessung von Geraden](#) an.

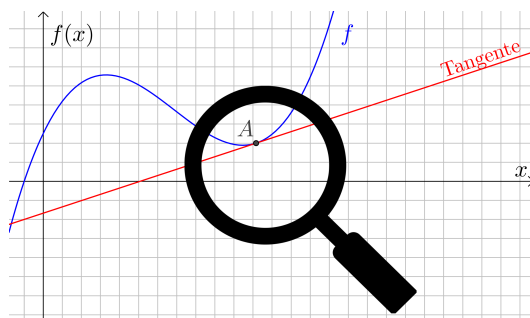
Arbeitsblatt – Differentialquotient



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Auf dem [Arbeitsblatt – Differentialquotient](#) behandeln wir die folgenden Fragen:

Was ist die **Linearisierung** von f in einem Punkt auf dem Graphen?

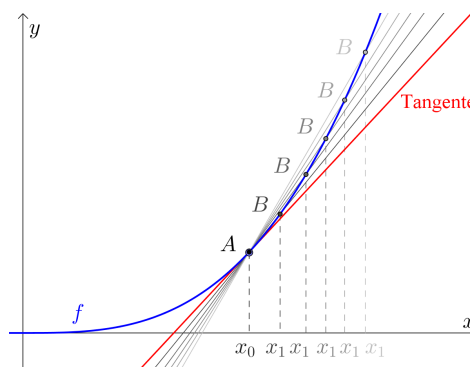
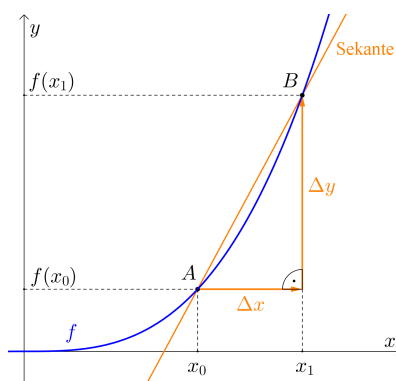


Was ist die **Sekante** durch zwei Punkte A und B auf dem Graphen einer Funktion f ?

Was ist die **mittlere Änderungsrate** von f in einem Intervall?

Was ist die **Tangente** in einem Punkt A auf dem Graphen?

Was ist die **lokale Änderungsrate** von f an einer Stelle x_0 ?

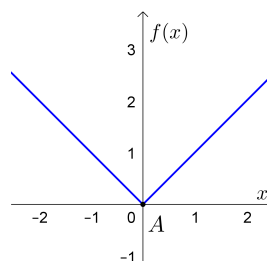


Welche Steigung hat die Funktion f mit $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 1$?

Was ist die **Ableitungsfunktion** f' von f ?

Was bedeutet **Differenzierbarkeit** geometrisch?

Wie kann eine Funktion *nicht* differenzierbar sein?



Beispiel 2.1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 3$.

Der Graph von f verläuft durch die Punkte $A = (x_0 \mid f(x_0))$ und $B = (x_0 + h \mid f(x_0 + h))$.

- 1) Ermittle die Steigung der Sekante durch die Punkte A und B .
- 2) Ermittle die Steigung der Tangente im Punkt A .
- 3) Erstelle eine Gleichung der Ableitungsfunktion f' .
- 4) An welcher Stelle ist die Steigung der Tangente genau 0?
An welchen Stellen ist die Steigung der Tangente positiv?
An welchen Stellen ist die Steigung der Tangente negativ?
- 5) Erstelle eine Gleichung der Tangente an der Stelle $x_0 = 1$.

Lösung.

- 1) Wir ermitteln die Steigung der Sekante mit dem Differenzenquotienten:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} &= \frac{4 \cdot (x_0 + h)^2 - 2 \cdot (x_0 + h) + 3 - (4 \cdot x_0^2 - 2 \cdot x_0 + 3)}{h} = \\ &= \frac{\cancel{4 \cdot x_0^2} + 8 \cdot x_0 \cdot h + 4 \cdot h^2 - \cancel{2 \cdot x_0} - 2 \cdot h + \cancel{3} - \cancel{4 \cdot x_0^2} + \cancel{2 \cdot x_0} - \cancel{3}}{h} = \\ &= \frac{h \cdot (8 \cdot x_0 + 4 \cdot h - 2)}{h} = 8 \cdot x_0 + 4 \cdot h - 2 \end{aligned}$$

- 2) Wir ermitteln die Steigung der Tangente an der Stelle x_0 mit dem Differentialquotienten:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} (8 \cdot x_0 + 4 \cdot h - 2) = 8 \cdot x_0 - 2$$

- 3) $f'(x) = 8 \cdot x - 2$

$$\begin{aligned} 4) \quad f'(x) = 0 &\iff 8 \cdot x - 2 = 0 \iff x = \frac{1}{4} \\ f'(x) > 0 &\iff 8 \cdot x - 2 > 0 \iff x > \frac{1}{4} \\ f'(x) < 0 &\iff 8 \cdot x - 2 < 0 \iff x < \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Die Tangente hat also an der Stelle $\frac{1}{4}$ die Steigung 0.

Wenn $x > \frac{1}{4}$ ist, dann ist die Steigung der Tangente positiv.

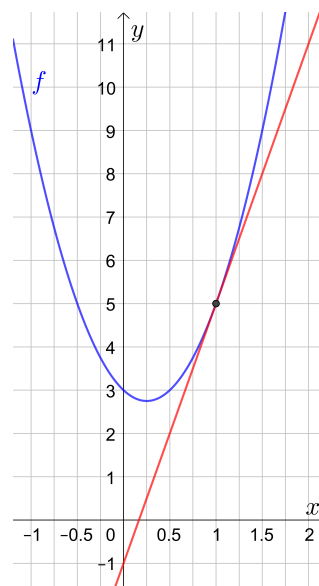
Wenn $x < \frac{1}{4}$ ist, dann ist die Steigung der Tangente negativ.

- 5) Die Steigung der Tangente an der Stelle 1 ist $f'(1) = 8 \cdot 1 - 2 = 6$.

Der Punkt $(1 \mid f(1)) = (1 \mid 5)$ liegt am Funktionsgraphen und damit auf der Tangente.

Damit berechnen wir eine Gleichung der Tangente:

$$y = 6 \cdot (x - 1) + 5 \implies y = 6 \cdot x - 1$$



□

Beispiel 2.2. ★ Berechne die Ableitung der Funktion $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ an der Stelle $x_0 \neq 0$.

Warum nicht $x_0 = 0$?

Lösung. Steigung der Sekante durch die Punkte $A = (x_0 \mid f(x_0))$ und $B = (x_0 + h \mid f(x_0 + h))$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0} \right) = \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{x_0 - (x_0 + h)}{(x_0 + h) \cdot x_0} \right) = \frac{-h}{h \cdot (x_0 + h) \cdot x_0} \\ &= -\frac{1}{(x_0 + h) \cdot x_0} \end{aligned}$$

Steigung der Tangente an der Stelle x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{(x_0 + h) \cdot x_0} \right) = -\frac{1}{x_0^2} = -1 \cdot x_0^{-2}$$

Die Ableitungsfunktion von $f(x) = x^{-1}$ ist somit $f'(x) = -1 \cdot x^{-2}$. □

Ableitung von $f(x) = x^{-2}$



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Übertrage die vorherigen Berechnungen auf die Funktion $f(x) = x^{-2}$.

Beispiel 2.3. ★ Berechne die Ableitung der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ an der Stelle $x_0 > 0$.

Lösung. Steigung der Sekante durch die Punkte $A = (x_0 \mid f(x_0))$ und $B = (x_0 + h \mid f(x_0 + h))$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} \\ &= \frac{(\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}) \cdot (\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})}{h \cdot (\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} && \text{Rationalmachen des Zählers} \\ &= \frac{(x_0 + h) - x_0}{h \cdot (\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} && (a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2 \end{aligned}$$

Steigung der Tangente an der Stelle x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x_0}}$$

Die Ableitungsfunktion von $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ist somit $f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$. □

Ableitung von $f(x) = \sqrt[3]{x}$



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Übertrage die vorherigen Berechnungen auf die Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$.

Überlege dir für die Berechnung, dass $(a - b) \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2) = a^3 - b^3$ gilt.



In Büchern kannst du viele verschiedene Schreibweisen für den Differentialquotienten finden:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Namensänderung: $h = \Delta x$

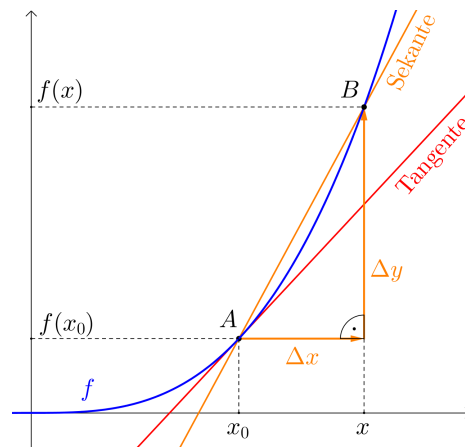
Wie rechts in der Skizze schreiben wir $x = x_0 + \Delta x$.

„ $\Delta x \rightarrow 0$ “ heißt dann, dass sich x zur Stelle x_0 hinbewegt.

Die beiden Schreibweisen

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

haben also die gleiche Bedeutung.



Für die Ableitungsfunktion f' gibt es auch die Schreibweise $\frac{df}{dx}$.

„df nach dx“, also f nach x abgeleitet.

Ist $v(t)$ eine **zeit**abhängige Funktion (zum Beispiel die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t), verwenden wir auch die Schreibweise $\dot{v}(t)$ statt $v'(t)$. Es ist dann also $v' = \dot{v} = \frac{dv}{dt}$.



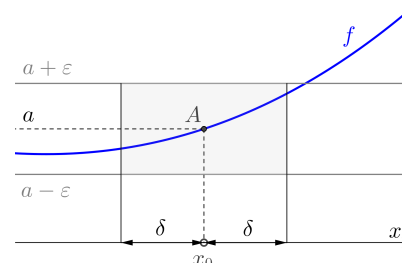
Was ist mit dem **Grenzwert einer Funktion f an der Stelle x_0** genau gemeint?

Wenn wir $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ schreiben, meinen wir:

Zu jeder Fehlertoleranz $\varepsilon > 0$ finden wir ein $\delta > 0$ so, dass

$$a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$$

für alle x in $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ mit $x \neq x_0$.



Wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, dann ist die Funktion f **stetig** an der Stelle x_0 .

Mehr dazu findest du auf dem [Arbeitsblatt – Stetigkeit](#).

Diese Definition vom Grenzwert kommt beim Differenzieren auch formal zum Einsatz:

$$g'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Beim Grenzwert $h \rightarrow 0$ bewegt sich h also in einem Intervall $] -\delta; \delta[$, wobei $h \neq 0$ ist.

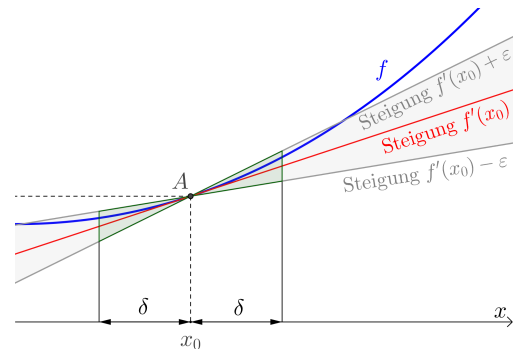
Deshalb dürfen wir auch durch h kürzen, wenn wir $\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$ vereinfachen.



Wenn f an der Stelle x_0 differenzierbar ist, dann gibt es eine Zahl $f'(x_0)$ mit folgender Eigenschaft:

Wir zeichnen die Gerade durch den Punkt $A = (x_0 \mid f(x_0))$ mit Steigung $f'(x_0)$, also die **Tangente** im Punkt A .

Zu jeder Fehlertoleranz $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass der Graph von f im Intervall $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ ganz im rechts grün dargestellten Keil verläuft.



★ Formale Begründung: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$\Rightarrow -\varepsilon < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) < \varepsilon \quad \text{für jede Stelle } x \text{ mit } x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \text{ und } x \neq x_0.$$

Wir formen diese Ungleichungskette so um, dass in der Mitte $f(x)$ stehen bleibt.

Beim Multiplizieren mit $x - x_0$ unterscheiden wir die Fälle **i)** $x > x_0$ und **ii)** $x < x_0$.

$$\textbf{i)} \quad (f'(x_0) - \varepsilon) \cdot (x - x_0) + f(x_0) < f(x) < (f'(x_0) + \varepsilon) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

für jede Stelle x mit $x_0 < x < x_0 + \delta$

$$\textbf{ii)} \quad (f'(x_0) - \varepsilon) \cdot (x - x_0) + f(x_0) > f(x) > (f'(x_0) + \varepsilon) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

für jede Stelle x mit $x_0 - \delta < x < x_0$

$y = (f'(x_0) - \varepsilon) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ bzw. $y = (f'(x_0) + \varepsilon) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ sind genau die **Gleichungen** jener Geraden, die den Keil oben und unten beranden.

Die Ungleichungen **i)** und **ii)** bedeuten also genau, dass der Graph von f im Intervall $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ ganz im oben grün dargestellten Keil verläuft.

3. ABLEITUNGSREGELN

Arbeitsblatt – Ableitungsregeln



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Auf dem [Arbeitsblatt – Ableitungsregeln](#) behandeln wir die folgenden Fragen:

Wie ermittelt man Ableitungen mit der **Summenregel**, **Differenzregel** und **Faktorregel**?

Wie ermittelt man Ableitungen von ...

- ... Polynomfunktionen?
- ... Potenz- und Wurzelfunktionen?
- ... Exponential- und Logarithmusfunktionen?
- ... Winkelfunktionen?

Wie ermittelt man Ableitungen mit der **Produktregel**, **Quotientenregel** und **Kettenregel**?

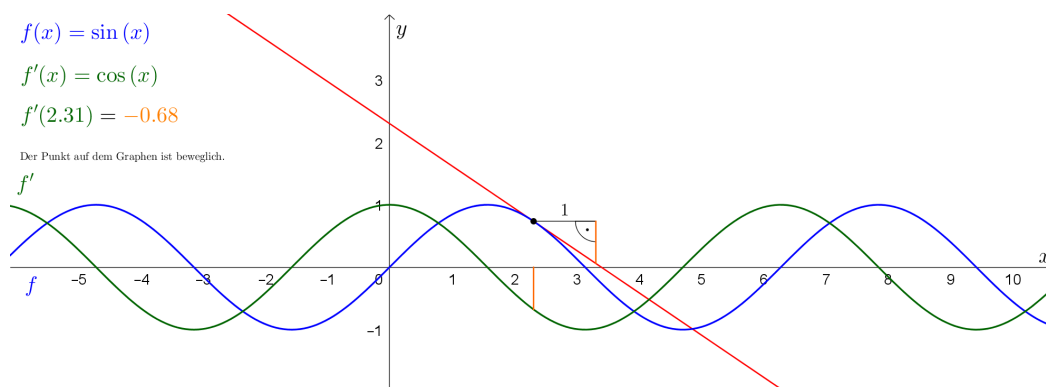
Ableitungen der elementaren Funktionen



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Versuche mit GeoGebra, die Ableitungen der elementaren Funktionen grafisch nachzuvollziehen.

In der folgenden Abbildung siehst du zum Beispiel die Graphen der Funktionen $f(x) = \sin(x)$ und $f'(x) = \cos(x)$. Wir wählen eine beliebige Stelle x_0 . Dann ist $\sin'(x_0)$ – also die Steigung der Tangente an der Stelle x_0 – gleich dem Funktionswert $\cos(x_0)$.



An welchen Stellen ist die Steigung der Tangente gleich 0?

Warum gilt die Faktorregel?



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Es ist $m(x) = c \cdot f(x)$. Warum gilt die Faktorregel $m'(x) = c \cdot f'(x)$?

Wir berechnen die Steigung der Sekante durch $A = (x_0 \mid m(x_0))$ und $B = (x_0 + h \mid m(x_0 + h))$:

$$\underbrace{\frac{m(x_0 + h) - m(x_0)}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} m'(x_0)} = \frac{c \cdot f(x_0 + h) - c \cdot f(x_0)}{h} = c \cdot \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x_0)}$$

Aus den Rechenregeln für [Grenzwerte](#) folgt $m'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$ an jeder Stelle x_0 .

Warum gilt die Summenregel?



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Es ist $s(x) = f(x) + g(x)$. Warum gilt die Summenregel $s'(x) = f'(x) + g'(x)$?

Wir berechnen die Steigung der Sekante durch $A = (x_0 \mid s(x_0))$ und $B = (x_0 + h \mid s(x_0 + h))$:

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{s(x_0 + h) - s(x_0)}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} s'(x_0)} &= \frac{f(x_0 + h) + g(x_0 + h) - (f(x_0) + g(x_0))}{h} = \\ &= \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x_0)} + \underbrace{\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} g'(x_0)} \end{aligned}$$

Aus den Rechenregeln für Grenzwerte folgt $s'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ an jeder Stelle x_0 .

Aus Differenzierbarkeit folgt Stetigkeit



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Wenn eine Funktion f an einer Stelle x_0 differenzierbar ist, dann gibt es eine Zahl $f'(x_0)$ mit:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Es gilt dann

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} ((x - x_0) \cdot f'(x_0)) = 0 \cdot f'(x_0) = 0,$$

also $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Die Funktion ist somit auch stetig an der Stelle x_0 .

Warum gilt die Produktregel?



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Es ist $p(x) = a(x) \cdot b(x)$. Warum gilt die Produktregel $p'(x) = a'(x) \cdot b(x) + a(x) \cdot b'(x)$?

Wir berechnen die Steigung der Sekante durch $A = (x_0 \mid p(x_0))$ und $B = (x_0 + h \mid p(x_0 + h))$:

$$\begin{aligned} \frac{p(x_0 + h) - p(x_0)}{h} &= \frac{a(x_0 + h) \cdot b(x_0 + h) - a(x_0) \cdot b(x_0)}{h} && \text{Wir fügen eine „kluge Null“ hinzu.} \\ &= \frac{a(x_0 + h) \cdot b(x_0 + h) - a(x_0) \cdot b(x_0 + h)}{h} + \frac{a(x_0) \cdot b(x_0 + h) - a(x_0) \cdot b(x_0)}{h} \\ &= \frac{a(x_0 + h) - a(x_0)}{h} \cdot b(x_0 + h) + a(x_0) \cdot \frac{b(x_0 + h) - b(x_0)}{h} \end{aligned}$$

Erkläre, warum daraus $p'(x_0) = a'(x_0) \cdot b(x_0) + a(x_0) \cdot b'(x_0)$ folgt.

Was steckt hinter der Kettenregel?



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Wenn $k(x) = f(g(x))$ ist, dann gilt:

Wir fügen eine „kluge Eins“ hinzu.

$$\frac{k(x_0 + h) - k(x_0)}{h} = \frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{h} = \underbrace{\frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{g(x_0 + h) - g(x_0)}}_{\text{Steigung einer Sekante von } f \text{ an der Stelle } g(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}}_{\text{Steigung einer Sekante von } g \text{ an der Stelle } x_0}$$

Beispiel 3.1. Die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$$

ist der Quotient der beiden Funktion $a(x) = \ln(x)$ und $b(x) = x^2$. Die Ableitungsfunktion ist also

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln(x) \cdot 2 \cdot x}{(x^2)^2}.$$

Wir können die Ableitungsfunktion noch vereinfachen:

$$f'(x) = \frac{x - 2 \cdot x \cdot \ln(x)}{x^4} = \frac{x \cdot (1 - 2 \cdot \ln(x))}{x^4} = \frac{1 - 2 \cdot \ln(x)}{x^3}.$$

□

Beispiel 3.2. Die Funktion $k(x) = e^{3 \cdot x}$ ist eine Verschachtelung der folgenden Funktionen:

Innere Funktion: $g(x) = 3 \cdot x \implies g'(x) = 3$

Äußere Funktion: $f(y) = e^y \implies f'(y) = e^y$

Ihre Ableitung können wir also mit der Kettenregel berechnen:

$$k(x) = e^{3 \cdot x} = f(g(x)) \implies k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{3 \cdot x} \cdot 3.$$

□

Beispiel 3.3. Bei der Funktion $k(x) = \sin(x^2 - 1)$ wird eine quadratische Funktion in die Sinusfunktion eingepackt:

$$x \xrightarrow{\text{Quadratische Funktion}} x^2 - 1 \xrightarrow{\text{Sinusfunktion}} \sin(x^2 - 1)$$

Die quadratische Funktion ist die innere Funktion und die Sinusfunktion die äußere Funktion:

Innere Funktion: $g(x) = x^2 - 1 \implies g'(x) = 2 \cdot x$

Äußere Funktion: $f(y) = \sin(y) \implies f'(y) = \cos(y)$

Die Ableitung der zusammengesetzten Funktion können wir mit der Kettenregel berechnen:

$$k(x) = \sin(x^2 - 1) = f(g(x)) \implies k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \cos(x^2 - 1) \cdot 2 \cdot x$$

□

Von außen nach innen auspacken



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Es kommt darauf an, in welcher Reihenfolge Funktionen verschachtelt werden. Die Funktionen

$$a(x) = \sin(x^2) \quad \text{und} \quad b(x) = \sin^2(x) = (\sin(x))^2$$

wurden in verschiedener Reihenfolge verschachtelt:

$$a: x \xrightarrow{\text{Quadrieren}} x^2 \xrightarrow{\text{Sinusfunktion}} \sin(x^2)$$

$$b: x \xrightarrow{\text{Sinusfunktion}} \sin(x) \xrightarrow{\text{Quadrieren}} (\sin(x))^2$$

Packen wir mit der Kettenregel die Schachteln von außen nach innen aus, erhalten wir

$$a'(x) = \cos(x^2) \cdot 2 \cdot x = 2 \cdot x \cdot \cos(x^2) \quad \text{und} \quad b'(x) = 2 \cdot (\sin(x)) \cdot \cos(x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$$

Beispiel 3.4. Die Funktion k mit

$$k(x) = \sin\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)$$

entsteht von innen nach außen durch Verschachtelung der Funktionen

$$x \xrightarrow{\text{Polynomfunktion}} x^2 + 1 \xrightarrow{\text{Wurzelfunktion}} \sqrt{x^2 + 1} \xrightarrow{\text{Sinusfunktion}} \sin\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)$$

Bei dieser Aufgabe sind also 3 Funktionen ineinander verschachtelt:

$$\begin{aligned} \text{Innerste Funktion: } h(x) &= x^2 + 1 \implies h'(x) = 2 \cdot x \\ \text{Mittlere Funktion: } g(y) &= \sqrt{y} \implies g'(y) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{y}} \\ \text{Äußerste Funktion: } f(z) &= \sin(z) \implies f'(z) = \cos(z) \end{aligned}$$

Die gegebene Funktion k ist die Verschachtelung dieser 3 Funktion:

$$k(x) = \sin\left(\sqrt{x^2 + 1}\right) = f\left(\sqrt{x^2 + 1}\right) = f(g(x^2 + 1)) = f(g(h(x)))$$

Wir verwenden die Kettenregel beim Ableiten zweimal hintereinander:

$$\begin{aligned} k'(x) &= \cos\left(\sqrt{x^2 + 1}\right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 1}\right)' \\ &= \cos\left(\sqrt{x^2 + 1}\right) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x^2 + 1)' \\ &= \cos\left(\sqrt{x^2 + 1}\right) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2 \cdot x = \frac{x \cdot \cos\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

□

Exponential- und Logarithmusfunktion



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Die Exponentialfunktion (mit Basis e) ist die Umkehrfunktion der Logarithmusfunktion (mit Basis e). Deshalb gilt für $a > 0$:

$$a = e^{\ln(a)}$$

Mit den Rechenregeln für Potenzen definieren wir die Exponentialfunktion mit Basis $a > 0$:

$$f(x) = a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$$

Exponential- und Logarithmusfunktion ableiten



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Die Ableitung der Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ ist $f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$.

Kannst du das mit $(e^x)' = e^x$ und den Ableitungsregeln erklären?

Die Ableitung der Logarithmusfunktion $g(x) = \log_a(x)$ ist $g'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$.

Kannst du das mit $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, der Regel $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ und den Ableitungsregeln erklären?

4. KURVENUNTERSUCHUNGEN

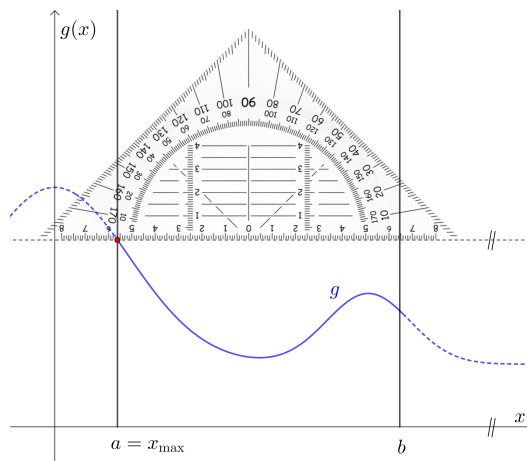
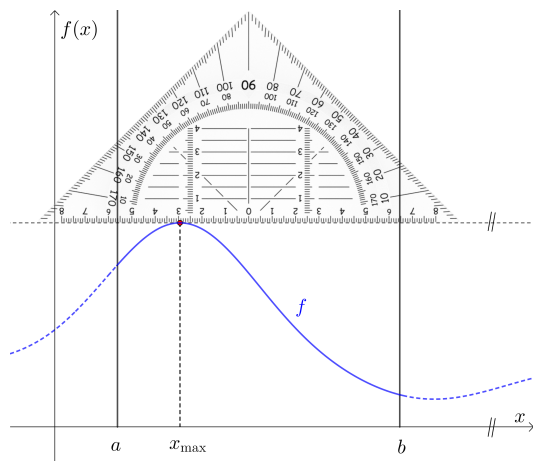
Arbeitsblatt – Kurvenuntersuchungen I



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Auf dem [Arbeitsblatt – Kurvenuntersuchungen I](#) behandeln wir die folgenden Fragen:

Wie berechnen wir den **größten Funktionswert** und den **kleinsten Funktionswert** einer differenzierbaren Funktion im Intervall $[a; b]$?



Was ist das **Monotonieverhalten** einer Funktion?

Wie hilft f' beim Ermitteln des Monotonieverhaltens von f ?

Was sind **Extrempunkte** und **Sattelpunkte** einer Funktion?

Wie hilft f' beim Ermitteln der Extrempunkte und Sattelpunkte von f ?

Beispiel 4.1. Berechne den kleinsten und den größten Funktionswert der Funktion f mit

$$f(x) = x^3 - 3 \cdot x$$

im Intervall $[0; 2]$.

Lösung. Die Ableitung ist $f'(x) = 3 \cdot x^2 - 3$.

Wir berechnen die Nullstellen der ersten Ableitung:

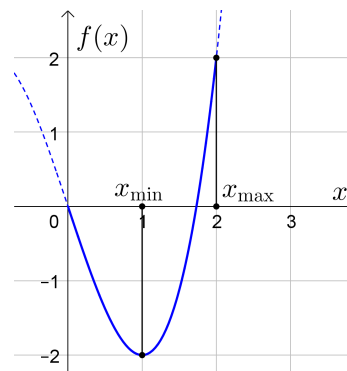
$$f'(x) = 0 \iff 3 \cdot x^2 - 3 = 0 \iff x^2 = 1$$

Im Intervall $[0; 2]$ ist also $x = 1$ die einzige Stelle mit einer waagrechten Tangente.

Es gilt $f(0) = 0$, $f(1) = -2$ und $f(2) = 2$.

Der kleinste Funktionswert ist also -2 .

Der größte Funktionswert ist also 2 .



□



Auf dem [Arbeitsblatt – Kurvenuntersuchungen II](#) behandeln wir die folgenden Fragen:

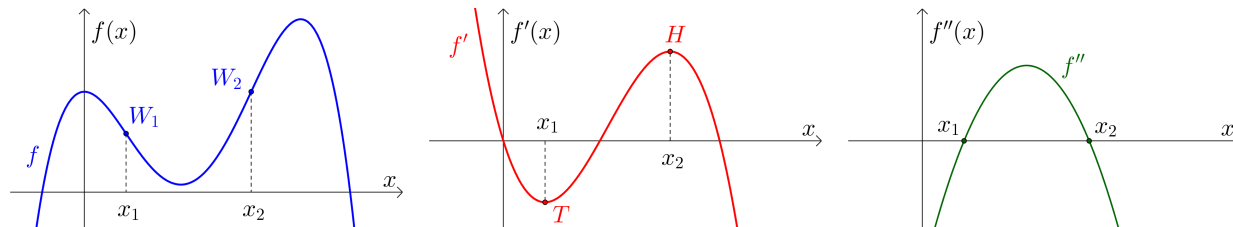
Was ist die **2. Ableitung von f** ? Wie ermittelt man höhere Ableitungen von f ?

Was ist das **Krümmungsverhalten** einer Funktion?

Wie hilft f'' beim Ermitteln des **Krümmungsverhaltens** von f ?

Was sind **Wendepunkte** einer Funktion?

Wie hilft f'' beim Ermitteln der **Wendepunkte** von f ?



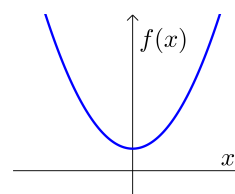
Jede **Polynomfunktion** vom Grad n hat *höchstens* n reelle Nullstellen.

Jede Polynomfunktion vom Grad n hat *genau* n Nullstellen, wenn man Folgendes beachtet:

1) Nullstellen können auch komplexe Zahlen sein.

Zum Beispiel: $f(x) = x^2 + 1$

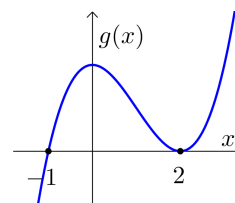
Die **komplexen Zahlen** $x_1 = i$ und $x_2 = -i$ sind Nullstellen von f .



2) Nullstellen können auch mehrfach auftreten. Zum Beispiel:

Zum Beispiel: $g(x) = (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 2) = x^3 - 3 \cdot x^2 + 4$

Die Funktion g hat eine doppelte Nullstelle bei $x = 2$
und eine einfache Nullstelle bei $x = -1$.



f ist eine Polynomfunktion vom Grad $n \geq 2$. Welchen Grad hat f' ? Welchen Grad hat f'' ?

Erkläre, warum eine Polynomfunktion von Grad 42 höchstens 41 Extremstellen haben kann.

Erkläre, warum eine Polynomfunktion von Grad 5 höchstens 3 Wendestellen haben kann.

Beispiel 4.2. Der Graph der Funktion f mit

$$f(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x + 1.$$

soll ohne Technologieinsatz skizziert werden. Dazu lösen wir zuerst die folgenden Aufgaben:

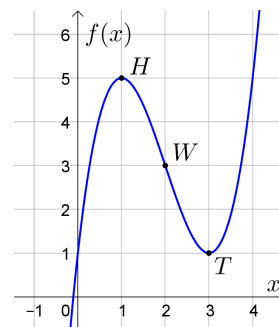
- Berechne die Extrempunkte von f . Ermittle das Monotonieverhalten von f .
- Berechne den Wendepunkt von f und eine Gleichung der Wendetangente.
Ermittle das Krümmungsverhalten von f .

Lösung. Wir berechnen die ersten drei Ableitungen von f :

$$f'(x) = 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 9$$

$$f''(x) = 6 \cdot x - 12$$

$$f'''(x) = 6$$



- Jene Stellen, an denen die Tangente waagrecht ist, sind Kandidatinnen für lokale Minima und Maxima. Wir suchen deshalb nach den Nullstellen der ersten Ableitung:

$$f'(x) = 0 \iff 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 9 = 0 \iff x_1 = 1, x_2 = 3$$

Aus $f'(1) = 0$ und $f''(1) = -6 < 0$ folgt, dass an der Stelle $x = 1$ ein lokales Maximum vorliegt.

f' ändert an der Stelle $x = 1$ das Vorzeichen von $+$ auf $-$. Unmittelbar links von $x = 1$ wächst f . Unmittelbar rechts davon fällt f .

Der Funktionswert an dieser Stelle ist $f(1) = 5$. Der Punkt $H = (1 \mid 5)$ ist ein lokales Maximum.

Aus $f'(3) = 0$ und $f''(3) = 6 > 0$ folgt, dass an der Stelle $x = 3$ ein lokales Minimum vorliegt.

Der Funktionswert an dieser Stelle ist $f(3) = 1$. Der Punkt $T = (3 \mid 1)$ ist ein lokales Minimum.

Monotonieverhalten: Die Funktion f ist in den Intervallen $]-\infty; 1[$ und $]3; \infty[$ streng monoton wachsend und im Intervall $]1; 3[$ streng monoton fallend.

- Für die Suche nach Wendepunkten berechnen wir die Nullstellen von f'' :

$$f''(x) = 0 \iff 6 \cdot x - 12 = 0 \iff x = 2$$

Aus $f''(2) = 0$ und $f'''(2) = 6 > 0$ folgt, dass das Vorzeichen von f'' an der Stelle $x = 2$

von $-$ auf $+$ wechselt. f hat an der Stelle $x = 2$ also eine Wendestelle.

Der Funktionswert an dieser Stelle ist $f(2) = 3$. Der Punkt $W = (2 \mid 3)$ ist also ein Wendepunkt.

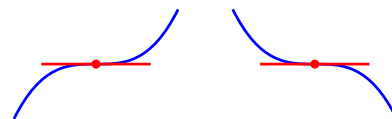
Die Wendetangente verläuft durch W und hat dort die Steigung $k = f'(2) = -3$.

Eine Gleichung der Wendetangente ist also $y = -3 \cdot x + 9$.

- Krümmungsverhalten: Die Funktion f ist im Intervall $]-\infty; 2[$ negativ gekrümmt und im Intervall $]2; \infty[$ positiv gekrümmt. □



Bei einem **Sattelpunkt** denken wir zuerst an einen Punkt so wie in den Bildern rechts.



Tatsächlich kann aber auch *jede* Umgebung vom Sattelpunkt $(x_0 \mid f(x_0))$ auf *beiden* Seiten sowohl größere Funktionswerte als auch kleinere Funktionswerte als $f(x_0)$ enthalten.

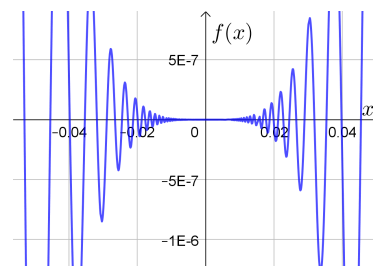
Ein solches **pathologisches Beispiel** ist die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0. \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Die Funktion f ist überall differenzierbar:

Rechne nach.

$$f'(x) = \begin{cases} 4 \cdot x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0. \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$



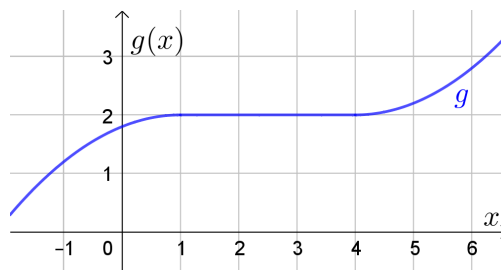
- 1) Erkläre, warum f in jedem Intervall $]0; \varepsilon[$ mit $\varepsilon > 0$ sowohl positive Funktionswerte als auch negative Funktionswerte hat.
- 2) Erkläre, warum f in jedem Intervall $]-\varepsilon; 0[$ mit $\varepsilon > 0$ sowohl positive Funktionswerte als auch negative Funktionswerte hat.

Der Punkt $(0 \mid 0)$ ist also weder ein Hochpunkt noch ein Tiefpunkt von f , sondern ein Sattelpunkt.

Beim folgenden Beispiel täuscht auch der erste Blick:

Die rechts dargestellte Funktion g ist im Intervall $[1; 4]$ konstant und überall differenzierbar.

Es gilt $g'(x) = 0$ für jede Stelle x in $[1; 4]$.



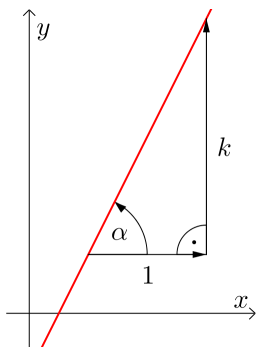
- 1) Erkläre, warum g an jeder Stelle in $]1; 4[$ ein lokales Minimum hat.
- 2) Erkläre, warum g an jeder Stelle in $]1; 4[$ ein lokales Maximum hat.

Die Funktion g hat im Intervall $[1; 4]$ also *keine* Sattelstelle.

5. STEIGUNGSWINKEL UND SCHNITTWINKEL

Steigungswinkel einer linearen Funktion

MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

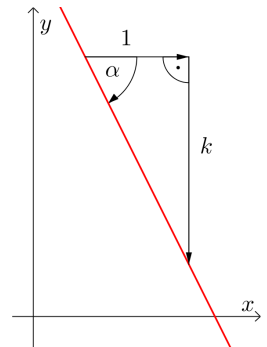


Erkläre, warum die lineare Funktion
 $f(x) = k \cdot x + d$ den **Steigungswinkel**

$$\alpha = \arctan(k)$$

hat.

Der Steigungswinkel α ist im Intervall $] -90^\circ; 90^\circ [$.



Winkel messen wir wie am [Einheitskreis](#) in mathematisch positiver Orientierung, also gegen den Uhrzeigersinn. Links siehst du einen positiven Winkel α . Rechts ist ein Winkel $\alpha < 0$ dargestellt.

Wenn $\alpha < 0$ ist, dann nennt man $|\alpha|$ auch **Neigungswinkel**.

Steigungswinkel von f an der Stelle x_0

MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Wenn wir vom Steigungswinkel einer Funktion f an der Stelle x_0 sprechen, dann meinen wir damit den Steigungswinkel der Tangente im Punkt $(x_0 | f(x_0))$.

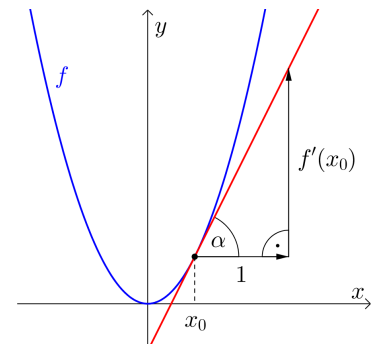
Erkläre die folgende Formel für den **Steigungswinkel** α :

$$\alpha = \arctan(f'(x_0)).$$

Wenn $f'(x_0) > 0$ ist, dann ist $\alpha > 0$.

Wenn $f'(x_0) = 0$ ist, dann ist $\alpha = 0$.

Wenn $f'(x_0) < 0$ ist, dann ist $\alpha < 0$.



Beispiel 5.1. An welchen Stellen hat die Funktion $f(x) = 3 \cdot x^2 - 11 \cdot x + 2$ den Steigungswinkel 45° ?

Lösung. Der Steigungswinkel 45° entspricht einer Steigung von $\tan(45^\circ) = 1$.

Wir suchen also nach allen Stellen x_0 , an denen $f'(x_0) = 1$ gilt.

Die Ableitung ist $f'(x) = 6 \cdot x - 11$, also

$$6 \cdot x_0 - 11 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x_0 = 2.$$

Die Funktion hat nur an der Stelle $x_0 = 2$ den Steigungswinkel 45° . □

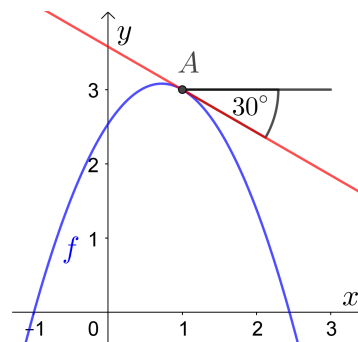
Beispiel 5.2. Die Tangente im Punkt $A = (1 \mid f(1))$ ist eingezeichnet. Berechne $f'(1)$.

Lösung.

Es ist $\tan(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,577\dots$ eine positive Zahl.
Die Steigung an der Stelle 1 ist aber negativ.

Tatsächlich beträgt die Steigung

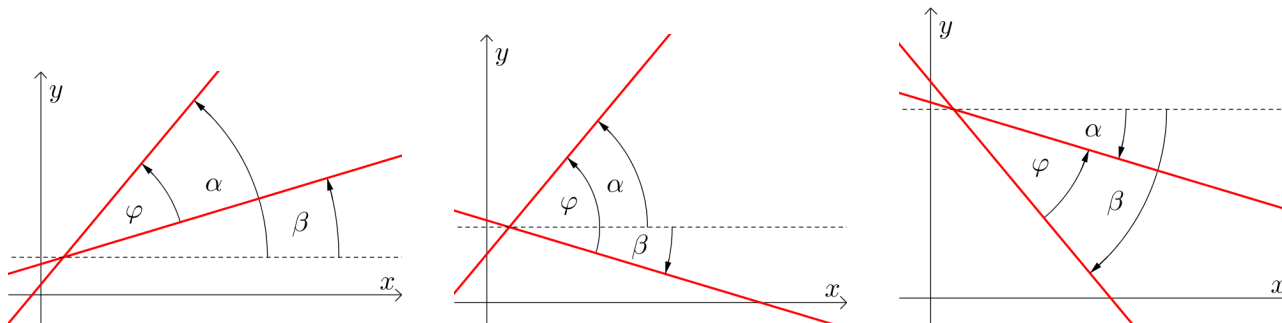
$$f'(1) = \tan(-30^\circ) = -\tan(30^\circ) = -0,577\dots$$



Winkel zwischen zwei linearen Funktionen

MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Zwei lineare Funktionen haben die Steigungswinkel α bzw. β , wobei $\alpha > \beta$ gilt.
Erkläre, weshalb die Graphen den (positiven) Winkel $\varphi = \alpha - \beta$ einschließen.



Schnittstellen und Schnittwinkel

MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Schneiden die Graphen zweier Funktionen f und g einander an der Stelle x_0 , dann gilt:

$$f(x_0) = g(x_0)$$

Wir zeichnen im Schnittpunkt S die beiden Tangenten ein.

Rechts ist der **Schnittwinkel** φ von f und g an der Stelle x_0 eingezeichnet.

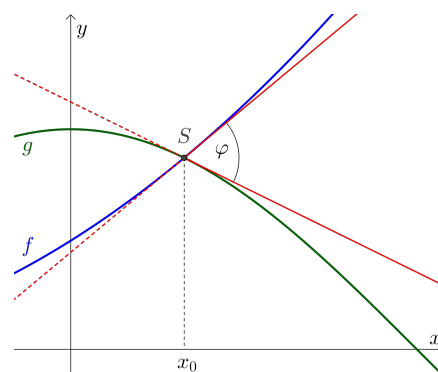
Erkläre:

Wenn $f'(x_0) > g'(x_0)$ ist, dann ist der **Schnittwinkel**

$$\varphi = \arctan(f'(x_0)) - \arctan(g'(x_0)).$$

„Größerer Steigungswinkel minus kleinerer Steigungswinkel“

Der Schnittwinkel φ liegt also im Intervall $[0^\circ; 180^\circ[$.



In manchen Büchern wird φ auch als Schnittwinkel der Tangenten definiert. Dann ist der Supplementärwinkel $180^\circ - \varphi$ auch richtig.

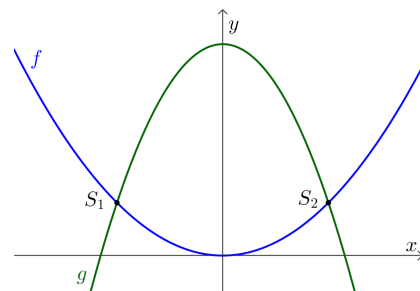
Beispiel 5.3. In der Skizze dargestellt sind die Graphen der Funktionen f und g mit

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 \quad \text{und} \quad g(x) = -\frac{3}{4} \cdot x^2 + 4$$

dargestellt.

1) Berechne die Koordinaten der beiden Schnittpunkte S_1 und S_2 .

2) Zeichne den Schnittwinkel zwischen f und g im Schnittpunkt S_2 ein und berechne dessen Betrag.



Lösung.

1) Die Schnittstellen sind die Lösungen der Gleichung

$$f(x) = g(x) \iff \frac{1}{4} \cdot x^2 = -\frac{3}{4} \cdot x^2 + 4 \iff x^2 = 4$$

Die Schnittstellen befinden sich also bei $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$.

Wegen $f(-2) = 1$ und $f(2) = 1$ haben die Schnittpunkte die Koordinaten

$$S_1 = (-2 \mid 1) \quad \text{bzw.} \quad S_2 = (2 \mid 1).$$

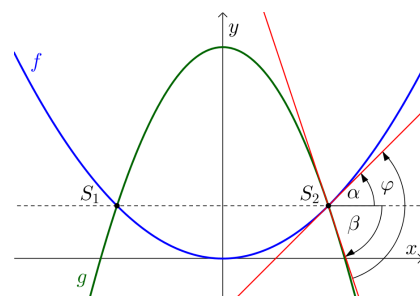
2) Die Ableitungsfunktionen sind

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x \quad \text{bzw.} \quad g'(x) = -\frac{3}{2} \cdot x.$$

Die Steigungswinkel betragen also

$$\alpha = \arctan(f'(2)) = 45^\circ \quad \text{bzw.}$$

$$\beta = \arctan(g'(2)) = -71,56\dots^\circ.$$



Der Schnittwinkel φ zwischen den beiden Funktionsgraphen im Schnittpunkt S_2 ist

$$\varphi = 45^\circ - (-71,56\dots^\circ) = 116,56\dots^\circ.$$

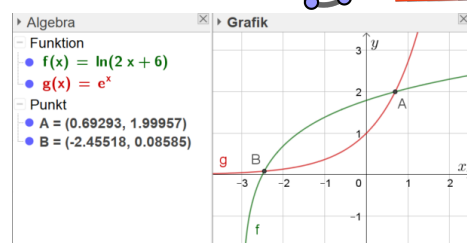
□

Technologieblatt – Kurvenuntersuchungen



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Auf dem [Technologieblatt – Kurvenuntersuchungen](#) findest du eine Einführung zu Kurvenuntersuchungen in GeoGebra.



6. UMGEKEHRTE KURVENUNTERSUCHUNGEN

Beispiel 6.1. Die Funktion f mit $f(x) = 4 \cdot x^3 + b \cdot x^2 - 6 \cdot x + 7$ ändert an der Stelle $x = -1$ ihr Monotonieverhalten.

- 1) Berechne den Koeffizienten b .
- 2) Begründe, ob f an der Stelle $x = -1$ ein lokales Minimum oder Maximum hat.

Lösung.

$$f'(x) = 12 \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x - 6 \implies f''(x) = 24 \cdot x + 2 \cdot b$$

- 1) $f'(-1) = 0 \implies 12 - 2 \cdot b - 6 = 0 \implies b = 3$
- 2) $f''(-1) = -24 + 6 = -18 < 0 \implies f$ hat ein lokales Maximum an der Stelle $x = -1$. □

Beispiel 6.2. Die Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^3 + \frac{3}{32} \cdot x^2 + 1$ ändert an der Stelle $x = 4$ ihr Krümmungsverhalten.

- 1) Berechne den Koeffizienten a .
- 2) Begründe, ob f an der Stelle $x = 4$ von negativer Krümmung auf positive Krümmung wechselt oder umgekehrt.

Lösung.

$$f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + \frac{6}{32} \cdot x \implies f''(x) = 6 \cdot a \cdot x + \frac{6}{32} \implies f'''(x) = 6 \cdot a$$

- 1) $f''(4) = 0 \implies 24 \cdot a + \frac{6}{32} = 0 \implies a = -\frac{1}{128}$
- 2) $f'''(4) = -\frac{6}{128} < 0 \implies f$ wechselt an der Stelle $x = 4$ von positiver auf negative Krümmung. □

Technologieblatt – Umgekehrte Kurvenuntersuchungen



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Wenn mehrere Koeffizienten einer Polynomfunktion unbekannt sind, übersetzen wir die Informationen in ein lineares Gleichungssystem.

Dieses lineare Gleichungssystem können wir entweder händisch oder mit Technologieinsatz lösen.

Auf dem [Technologieblatt – Umgekehrte Kurvenuntersuchungen](#) findest du Erklärungen, wie man solche Aufgaben mit GeoGebra lösen kann.

CAS	
1	$f(x) := a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ $\rightarrow f(x) := a x^3 + b x^2 + c x + d$
2	$f(3) = -2$ $\rightarrow 27 a + 9 b + 3 c + d = -2$
3	$f(-2) = 5$ $\rightarrow -8 a + 4 b - 2 c + d = 5$
4	$f'(1) = 0$ $\rightarrow 3 a + 2 b + c = 0$
5	$f''(4) = 0$ $\rightarrow 24 a + 2 b = 0$
6	$\{ \$2, \$3, \$4, \$5 \}$ Löse: $\left\{ \left\{ a = -\frac{7}{80}, b = \frac{21}{20}, c = \right\} \right.$

7. PHYSIKALISCHE ANWENDUNGSAUFGABEN

Momentane Änderungsrate


 MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

 Bei zeitabhängigen Funktion $f(t)$ wird der **Differentialquotient**

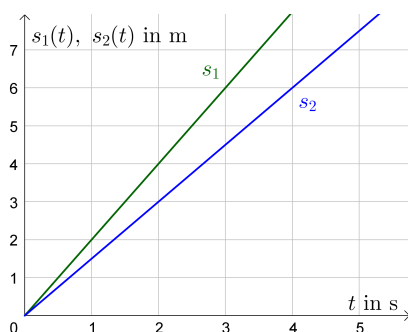
$$f'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

 $f'(t_0)$ ist Steigung der Tangente an der Stelle t_0 .

 auch als **momentane Änderungsrate** zum Zeitpunkt t_0 bezeichnet.

Läufst du mit einer konstanten Geschwindigkeit von $v = 3 \text{ m/s}$, dann legst du in t Sekunden insgesamt $3 \cdot t$ Meter zurück. Allgemein ist bei einer konstanten Geschwindigkeit v der nach t Zeiteinheiten zurückgelegte Weg eine lineare Funktion mit Steigung v :

$$s(t) = v \cdot t$$

Beispiel 7.1. Lies die konstante Geschwindigkeit der beiden Personen aus dem Diagramm ab:

 Die Steigung von s_1 ist $\frac{\Delta s_1}{\Delta t} = \frac{2 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 2 \text{ m/s}$.

 Die Steigung von s_2 ist $\frac{\Delta s_2}{\Delta t} = \frac{3 \text{ m}}{2 \text{ s}} = 1,5 \text{ m/s}$.

 Die beiden Personen bewegen sich also mit den konstanten Geschwindigkeiten 2 m/s bzw. $1,5 \text{ m/s}$.

Konstante Geschwindigkeit


 MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

- 1) Erkläre, warum die momentane Änderungsrate der obigen Weg-Zeit-Funktionen zu jedem Zeitpunkt genau die konstante Geschwindigkeit der Person ist. Kurz:

$$s'_1(t) = v_1 \quad \text{und} \quad s'_2(t) = v_2.$$

- 2) Eine dritte Person bewegt sich ebenfalls mit konstanter Geschwindigkeit, möchte aber weder am langsamsten noch am schnellsten sein. Zeichne oben einen möglichen Graphen von s_3 ein.

Momentangeschwindigkeit

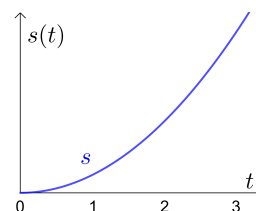

 MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Bei der rechts dargestellten Weg-Zeit-Funktion s werden in gleich langen Zeiträumen *nicht* immer gleich lange Strecken zurückgelegt.

Die Geschwindigkeit ist also nicht konstant.

Zu welchem Zeitpunkt ist die Momentangeschwindigkeit größer:

Zum Zeitpunkt $t = 1$ oder zum Zeitpunkt $t = 2$? Woran erkennst du das?



Was bedeutet Momentangeschwindigkeit?



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

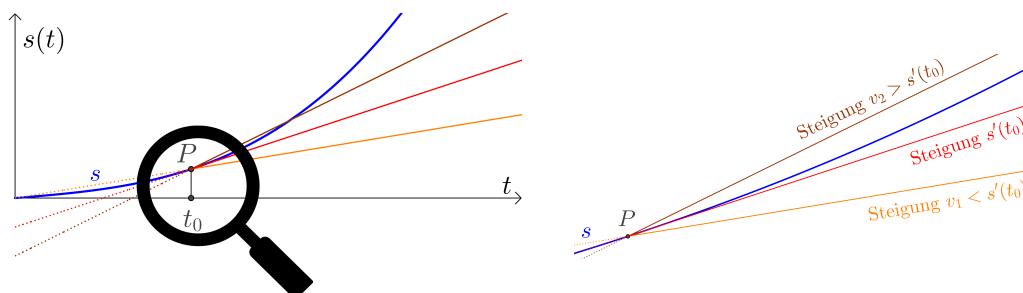
Tatsächlich ist die **Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0** genau $v(t_0) = s'(t_0)$.

Dieser Zusammenhang stimmt mit unserer Intuition überein, aber ist *nicht* offensichtlich.

Wir geben jetzt eine mathematisch *exakte* Erklärung dafür.

Die Tangente im Punkt $P = (t_0 | s(t_0))$ hat die Steigung $s'(t_0)$.

Wir legen durch P eine Gerade mit Steigung $v_2 > s'(t_0)$ und eine Gerade mit Steigung $v_1 < s'(t_0)$:



Dann gibt es einen Zeitraum um t_0 , in dem der Graph von s zwischen den beiden Geraden verläuft (siehe S. 8)

Stellen wir uns vor, wir fahren mit einem Auto auf der mittleren von drei Fahrspuren.

Unsere Fahrt wird durch die Weg-Zeit-Funktion s beschrieben.

Zum Zeitpunkt t_0 befindet sich auf der rechten Fahrbahn auf gleicher Höhe ein Auto, das mit konstanter Geschwindigkeit $v_1 < s'(t_0)$ fährt.

Die geometrische Eigenschaft garantiert, dass wir das rechte Auto *augenblicklich* überholen.

Auf der linken Fahrbahn hingegen befindet sich auf gleicher Höhe ein Auto, das mit konstanter Geschwindigkeit $v_2 > s'(t_0)$ fährt.

Die geometrische Eigenschaft garantiert, dass uns das linke Auto *augenblicklich* überholt.

Das gilt für alle Zahlen v_1 und v_2 mit $v_1 < s'(t_0) < v_2$.

$s'(t_0)$ ist die einzige Zahl mit dieser Eigenschaft.

Also ist $s'(t_0)$ genau die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 .

Mittlere Geschwindigkeit und Momentangeschwindigkeit



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Die **mittlere Geschwindigkeit** im Zeitraum $[t_0; t_1]$ ist

$$\frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{\text{zurückgelegter Weg}}{\text{benötigte Zeit}},$$

also die *mittlere* Änderungsrate von s im Zeitraum $[t_0; t_1]$.

Die **Momentangeschwindigkeit** zum Zeitpunkt t_0 ist

$$v(t_0) = s'(t_0),$$

also die *momentane* Änderungsrate von s zum Zeitpunkt t_0 .

Geschwindigkeit-Zeit-Funktion



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

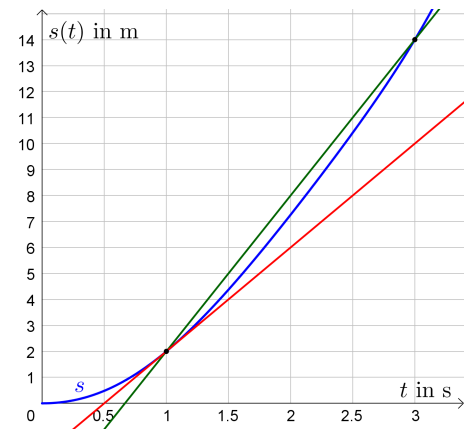
Die Ableitung der Weg-Zeit-Funktion s ist die **Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v** :

$$v(t) = s'(t)$$

Beispiel 7.2. Der Graph einer Weg-Zeit-Funktion s ist dargestellt.

$s(t)$... zurückgelegter Weg (in m) zum Zeitpunkt t (in s)

- Ermittle den zurückgelegten Weg im Zeitraum $[1\text{ s}; 3\text{ s}]$.
- Ermittle die mittlere Geschwindigkeit im Zeitraum $[1\text{ s}; 3\text{ s}]$.
- Ermittle die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 1\text{ s}$.



Lösung.

- Der zurückgelegte Weg beträgt $s(3) - s(1) = 14\text{ m} - 2\text{ m} = 12\text{ m}$.
- Die mittlere Geschwindigkeit im Zeitraum $[1\text{ s}; 3\text{ s}]$ beträgt

$$\frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = \frac{12\text{ m}}{2\text{ s}} = 6\text{ m/s}.$$

- Die gesuchte Momentangeschwindigkeit ist die Steigung der Tangente an der Stelle $t = 1$:

$$v(1) = s'(1) = \frac{4\text{ m}}{1\text{ s}} = 4\text{ m/s}.$$

□

Konstante Beschleunigung



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

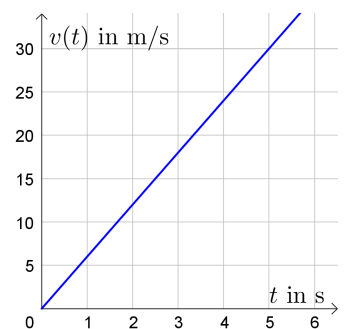
Ein Auto beschleunigt in 5 Sekunden von 0 m/s auf 30 m/s. Wenn die Beschleunigung konstant ist, dann wird das Auto also pro Sekunde um 6 m/s schneller. Kurz: Die Beschleunigung beträgt $a = 6\text{ m/s}^2$.

Allgemein ist bei einer konstanten Beschleunigung a die Geschwindigkeit v nach t Zeiteinheiten eine lineare Funktion mit Steigung a :

$$v(t) = a \cdot t$$

Bei konstanter Geschwindigkeit v gilt $s'(t) = v$. Bei konstanter Beschleunigung a gilt $v'(t) = a$.

Je stärker v an der Stelle t_0 ansteigt, desto größer ist die Momentanbeschleunigung zum Zeitpunkt t_0 .



Mittlere Beschleunigung und Momentanbeschleunigung


 MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Die **mittlere Beschleunigung** im Zeitraum $[t_0; t_1]$ ist

$$\frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{\text{Geschwindigkeitsänderung}}{\text{benötigte Zeit}},$$

also die *mittlere* Änderungsrate von v im Zeitraum $[t_0; t_1]$.

Die **Momentanbeschleunigung** zum Zeitpunkt t_0 ist

$$a(t_0) = v'(t_0),$$

also die *momentane* Änderungsrate von v zum Zeitpunkt t_0 .

Beschleunigung-Zeit-Funktion

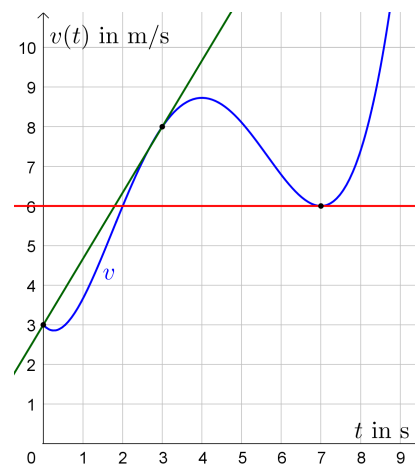

 Σ $\int$
 Π $\sin$

 MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Die Ableitung der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v ist die Beschleunigung-Zeit-Funktion a :

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

Beispiel 7.3. Der Graph einer Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v ist dargestellt.



$v(t)$... Geschwindigkeit (in m/s) zum Zeitpunkt t (in s)

- Ermittle die absolute Änderung von v im Zeitraum $[0\text{ s}; 3\text{ s}]$.
- Ermittle die mittlere Beschleunigung im Zeitraum $[0\text{ s}; 3\text{ s}]$.
- Ermittle die Momentanbeschleunigung zum Zeitpunkt $t = 7\text{ s}$.

Lösung.

- Die Geschwindigkeitsänderung beträgt $v(3) - v(0) = 8 - 3 = 5\text{ m/s}$.
- Die mittlere Beschleunigung im Zeitraum $[0\text{ s}; 3\text{ s}]$ beträgt

$$\frac{v(3) - v(0)}{3 - 0} = \frac{5\text{ m/s}}{3\text{ s}} = 1,666\dots\text{ m/s}^2.$$

- Die Momentanbeschleunigung ist die Steigung der Tangente an der Stelle $t = 7$:

$$a(7) = v'(7) = 0\text{ m/s}^2.$$

□

Beispiel 7.4. Der von einem Auto zurückgelegte Weg s lässt sich in einem Abschnitt näherungsweise durch folgende Funktion beschreiben:

$$s(t) = -\frac{1}{24} \cdot t^4 + \frac{1}{3} \cdot t^3 + t^2 + 8 \cdot t$$

$t \dots$ Zeit in Sekunden, $0 \leq t \leq 3$

$s(t) \dots$ zurückgelegter Weg nach der Zeit t

Berechne jene Zeitpunkte im Zeitraum $[0\text{s}; 3\text{s}]$, an denen die Momentanbeschleunigung des Autos maximal bzw. minimal ist.

Lösung. Die Gleichung der zugehörigen Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v ist

$$v(t) = s'(t) = -\frac{1}{6} \cdot t^3 + t^2 + 2 \cdot t + 8.$$

Die Gleichung der zugehörigen Beschleunigung-Zeit-Funktion a ist

$$a(t) = v'(t) = -\frac{1}{2} \cdot t^2 + 2 \cdot t + 2.$$

Wir berechnen die Stellen von a , an denen die Tangente waagrecht ist:

$$a'(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -t + 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 2\text{ s}$$

Wir berechnen die Funktionswerte an den Rändern und für $t = 2\text{ s}$:

$$a(0) = 2\text{ m/s}^2, \quad a(2) = 4\text{ m/s}^2, \quad a(3) = 3,5\text{ m/s}^2$$

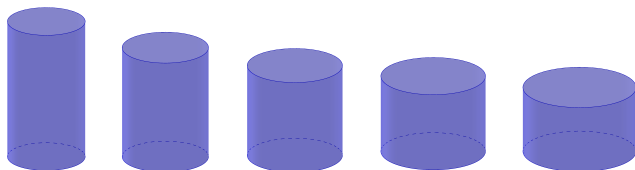
Die Momentanbeschleunigung ist nach 2 Sekunden maximal (lokales und globales Maximum) und nach 0 Sekunden minimal (Randminimum). □

8. OPTIMIERUNGSAUFGABEN

Arbeitsblatt – Optimierungsaufgaben



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE



Die links dargestellten Zylinder haben alle das gleiche Volumen. Welcher hat die kleinste Oberfläche?

Auf dem [Arbeitsblatt – Optimierungsaufgaben](#) findest du solche Aufgabenstellungen, die wir mithilfe der Differentialrechnung jetzt auch exakt lösen können.

Optimierungsprobleme auf offenen Intervallen



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

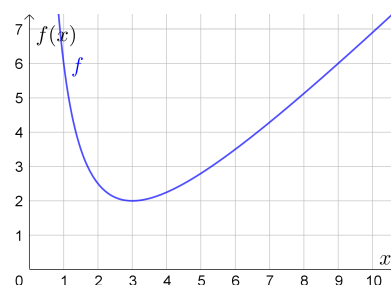
Wir betrachten die Funktion f mit

$$f(x) = x - 4 + \frac{9}{x}$$

auf dem *offenen* Intervall $]0; 10[$.

Nimmt f in $]0; 10[$ einen kleinsten Funktionswert an?

Nimmt f in $]0; 10[$ einen größten Funktionswert an?



Die Funktion f ist im Intervall $]0; 10[$ differenzierbar:

$$f(x) = x - 4 + 9 \cdot x^{-1} \implies f'(x) = 1 - 9 \cdot x^{-2} = 1 - \frac{9}{x^2}$$

Wir suchen alle Stellen in $]0; 10[$, an denen die Tangente an f waagrecht ist:

$$f'(x) = 0 \iff 1 - \frac{9}{x^2} = 0 \iff x^2 = 9 \iff x_1 = 3, (x_2 = -3)$$

Es gilt $f(3) = 2$, aber diesmal können wir *nicht* beide Funktionswerte am Rand berechnen:

Wenn wir uns von der linken Seite an die Stelle 10 herantasten, existiert ein Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) = 10 - 4 + \frac{9}{10} = 6,9$$

An der Stelle $x = 0$ ist f aber *nicht* definiert.

Wenn wir uns von der rechten Seite an die Stelle 0 herantasten, wird $\frac{9}{x}$ unbegrenzt groß.

Genau gesagt: Zu jeder noch so großen Zahl M gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $f(x) > M$ für alle x in $]0; \varepsilon[$ gilt.

Wir schreiben dafür: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$

Mehr zu solchen Grenzwerten findest du auf dem [Arbeitsblatt – Stetigkeit](#).

Der kleinste Funktionswert von f in $]0; 10[$ ist also $f(3) = 2$.

Die Funktion f hat *keinen* größten Funktionswert in $]0; 10[$.

9. MITTELWERTSATZ DER DIFFERENTIALRECHNUNG

Beispiel 9.1. Der Tunnel Kaisermühlen hat die Länge 2150 m.

Ein Auto benötigt 94 s zur Durchfahrt des Tunnels.

- 1) Berechne die mittlere Geschwindigkeit des Autos im Tunnel in km/h.
- 2) Begründe, warum die Momentangeschwindigkeit zu einem Zeitpunkt während der Durchfahrt größer als 80 km/h gewesen sein muss.

Lösung.

- 1) Wir berechnen die mittlere Geschwindigkeit ($1 \text{ m/s} = 3,6 \text{ km/h}$):

$$\frac{2150 \text{ m}}{94 \text{ s}} = 22,87... \text{ m/s} = 82,34... \text{ km/h}$$

- 2) Die Momentangeschwindigkeit kann nicht zu jedem Zeitpunkt kleiner als die mittlere Geschwindigkeit 82,34... km/h sein. □

Arbeitsblatt – Mittelwertsatz der Differentialrechnung

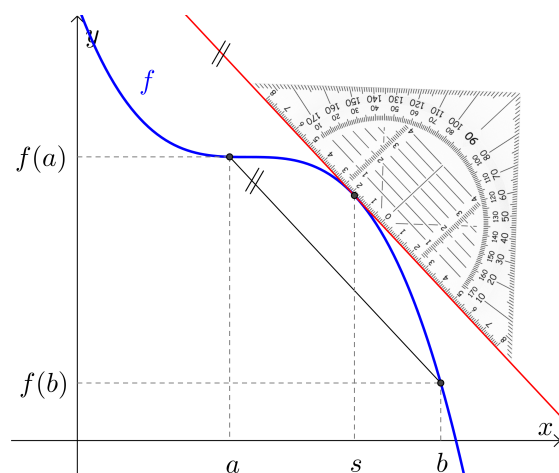
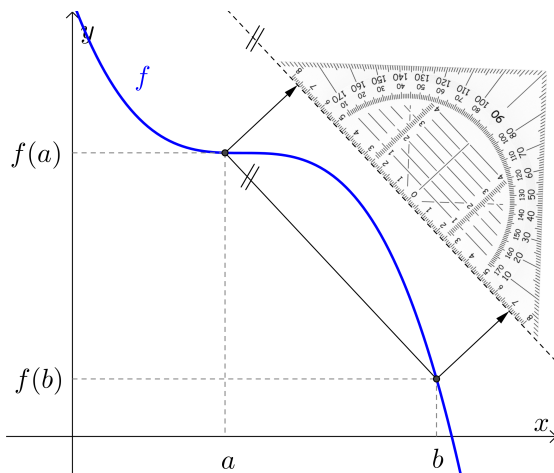
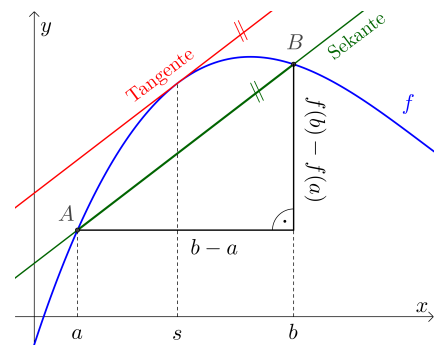


Wenn f eine differenzierbare Funktion ist, dann gibt es in jedem Intervall $[a; b]$ eine Stelle s mit:

$$f'(s) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

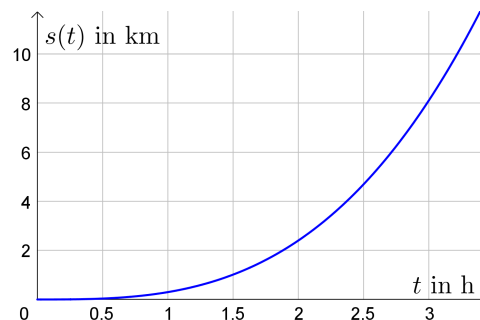
Mehr dazu findest du auf dem

[Arbeitsblatt – Mittelwertsatz der Differentialrechnung.](#)



Beispiel 9.2. In der Abbildung ist der Graph der Weg-Zeit-Funktion $s(t) = 0,3 \cdot t^3$ dargestellt.

- 1) Berechne die mittlere Geschwindigkeit in km/h im Zeitraum $[1 \text{ h}; 3 \text{ h}]$.
- 2) Berechne jenen Zeitpunkt im Intervall $[1 \text{ h}; 3 \text{ h}]$, an dem die Momentangeschwindigkeit mit der mittleren Geschwindigkeit übereinstimmt.
Veranschauliche die Ergebnisse in der Abbildung.



Lösung.

- 1) Der zurückgelegte Weg im Zeitraum $[1 \text{ h}; 3 \text{ h}]$ beträgt $s(3) - s(1) = 7,8 \text{ km}$.
Die mittlere Geschwindigkeit ist also $\frac{7,8 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 3,9 \text{ km/h}$.
- 2) Es ist $v(t) = s'(t) = 0,9 \cdot t^2$. Die Gleichung $v(t) = 3,9$ hat die Lösungen $t_1 = 2,081... \text{ h}$ und $(t_2 = -2,081... \text{ h})$. Nach rund 2 Stunden und 5 Minuten stimmt also die Momentangeschwindigkeit mit der mittleren Geschwindigkeit im Zeitraum $[1 \text{ h}; 3 \text{ h}]$ überein. □

Monotonieverhalten



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Die folgenden Eigenschaften erscheinen klar.

Tatsächlich sind sie Konsequenzen aus dem Mittelwertsatz.

- 1) Angenommen $f'(x) > 0$ für alle x in $[a; b]$.

Dann ist f streng monoton wachsend auf $[a; b]$.

Erklärung:

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung garantiert (mindestens) eine Stelle s im Intervall $[a; b]$ mit:

$$f'(s) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Die linke Seite ist laut Annahme positiv, also muss auch die rechte Seite positiv sein.

Da $a < b$ ist, muss damit auch $f(a) < f(b)$ sein.

Mit dem gleichen Argument gilt für alle Stellen $x, y \in [a; b]$ mit $x < y$, dass $f(x) < f(y)$.

Also ist f streng monoton wachsend auf $[a; b]$.

- 2) Angenommen $f'(x) < 0$ für alle x in $[a; b]$.

Erkläre, warum die Funktion f streng monoton fallend auf $[a; b]$ ist.

- 3) Angenommen $f'(x) = 0$ für alle x in $[a; b]$.

Erkläre, warum f konstant auf $[a; b]$ ist.

10. NEWTONSCHES NÄHERUNGSVERFAHREN

Arbeitsblatt – Newtonsches Näherungsverfahren

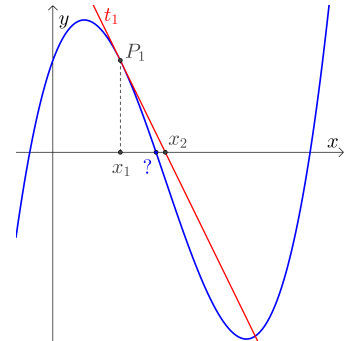


Auf dem [Arbeitsblatt – Newtonsches Näherungsverfahren](#) behandeln wir die folgenden Fragen:

Gesucht sind die Lösungen einer Gleichung,
zum Beispiel die Nullstellen einer Funktion.

Wie kann das **Bisektionsverfahren** dabei helfen,
die Lösungen näherungsweise zu ermitteln?

Wie kann das **Newtonsche Näherungsverfahren** dabei helfen,
die Lösungen näherungsweise zu ermitteln?



Beispiel 10.1. Die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 2 \cdot x - 5$ hat genau eine reelle Nullstelle.
Berechne diese Nullstelle näherungsweise. (Newton-Startwert: $x_1 = 2$)

Lösung. $f(x) = x^3 - 2 \cdot x - 5 \implies f'(x) = 3 \cdot x^2 - 2$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2,1$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2,094\,56\dots$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 2,094\,55\dots$$

□

Beispiel 10.2. Die Gleichung $2 \cdot x \cdot \ln(x) = 1$ hat genau eine Lösung.
Berechne diese Lösung näherungsweise. (Newton-Startwert: $x_1 = 1$)

Lösung. $f(x) = 2 \cdot x \cdot \ln(x) - 1 \implies f'(x) = 2 \cdot \ln(x) + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = 2 \cdot \ln(x) + 2$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1,5$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1,4230\dots$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 1,4215\dots$$

□